



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

**SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE
DISPOSITIVOS DE LEVITACION
SUPERCONDUCTORA POR EFECTO
MEISSNER**

Autor:

José Alberto Díaz García

Director/es:

José Luis Pérez Díaz

DEPARTAMENTO/INSTITUTO

Leganés, Febrero de 2008

TESIS DOCTORAL

SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER

Autor: José Alberto Díaz García

Director/es: José Luis Pérez Díaz

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Legané, de de

AGRADECIMIENTOS y DEDICATORIAS

Dedico el presente trabajo, a la memoria de mi Padre, a mi Madre por su infinito espíritu de sacrificio y entrega para con toda su familia y sobre todo, a mi Hermana que esta pasando el momento más duro de su vida y por quien rezo todo los días para que ocurra un milagro.

En el apartado de agradecimientos, mencionar sobre todo el apoyo recibido de los profesores D. Juan Carlos García Prada y D. José Luís Pérez Díaz, sin cuyo empuje y aportaciones hubiese sido imposible finalizar esta tesis.

RESUMEN

SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER

Autor: José Alberto Díaz García

Director: José Luís Pérez Díaz

Programa de doctorado en Ingeniería Mecánica y Organización Industrial.

Esta tesis doctoral aporta un esquema sistemático para el diseño de dispositivos de levitación magnética superconductora por efecto Meissner. Partiendo de la expresión propuesta recientemente por Pérez-Díaz y García-Prada (PDGP) en este trabajo se demuestra que la aplicabilidad de dicha expresión es general y se deriva de las ecuaciones de Maxwell y London. Esta expresión, aunque deducida en el caso de exclusión total de campo magnético o estado Meissner, permite también tratar casos de penetración parcial de campo magnético o estado mixto superponiendo a la fuerza Meissner la fuerza que ejerce la imanación del propio superconductor.

Además y no menos importante, se realiza una interpretación geométrica de la expresión citada que permite demostrar que el factor de ganancia mecánica del sistema es igual a 2 de forma local y no sólo global. Esto permite también interpretar la estabilidad de algunos sistemas de levitación Meissner orientando así sobre su diseño.

Finalmente, se calculan casos de geometrías específicas y de posible aplicación mecánica. En concreto se calculan las fuerzas que aparecen en el caso de un imán permanente en el interior de un cilindro de interesantes aplicaciones mecánicas.

Para realizar los cálculos se emplea el programa MAPLE v11.

Como conclusiones de este trabajo tenemos pues:

1. La expresión PDGP, así validada, es aplicable para el cálculo por elementos finitos de cualquier geometría con la precisión que se desee.
2. Se dispone, así, de una herramienta precisa de cálculo y de un criterio de diseño basado en la interpretación geométrica.
3. Se determina las leyes de la mecánica de un imán en el interior de un cilindro definiendo así las disposiciones óptimas para determinados usos mecánicos.

INDICE

1.	INTRODUCCION	7
1.1.	Historia de la superconductividad	13
1.2.	Tipos de superconductores	21
1.2.1.	Según composición química	21
1.2.2.	Según comportamiento al campo magnético	22
1.2.3.	Según la temperatura crítica	26
1.3.	Ecuaciones de London	37
1.3.1.	Ecuaciones de Maxwell	38
1.3.2.	Derivación de las ecuaciones de London	41
1.4.	Cuantización del flujo	48
2.	LEVITACION	54
2.1.	Estado del arte	54
2.1.1.	Levitación Aerodinámica	55
2.1.2.	Levitación Electrostática	56
2.1.3.	Levitación Óptica	56
2.1.4.	Levitación Acústica	57
2.1.5.	Levitación Magnética	59
2.2.	Levitación superconductora	62
3.	LEVITACION MAGNETICA SUPERCONDUCTORA EN ESTADO MEISSNER. FACTOR 2 DE PD-GP	72
3.1.	Análisis	72
3.2.	Modelos teóricos de levitación superconductora en estado Meissner ..	76

3.2.1.	Modelo de la fuerza directa	76
3.2.2.	Modelo de la energía potencial.....	76
3.3.	Comparación de modelos	78
3.4.	Mecanismo equivalente e interpretación.....	80
3.5.	Universalidad del factor 2 de PD-GP.....	83
4.	LEVITACION MAGNETICA SUPERCONDUCTORA EN ESTADO	
	MEISSNER. APLICABILIDAD GENERAL DEL MODELO PD-GP.	87
4.1.	Descripción del modelo	87
4.1.1.	Introducción.....	87
4.1.2.	método	89
4.1.3.	Superconductor plano infinito	91
4.1.4.	Superconductor cilíndrico finito.....	92
4.1.5.	Resultados y comparación.....	92
4.1.6.	Conclusiones del modelo PD-GP	98
4.2.	Demostración del modelo.....	100
4.2.1.	Magneto-mecánica	100
4.2.2.	Equivalencia con el método de las imágenes: caso de superconductor plano infinito	108
5.	APLICACION CASO DE CILINDRO SUPERCONDUCTOR.....	113
5.1.	Caso 1.....	116
5.2.	Caso 2.....	124
5.3.	Caso 3.....	133
5.4.	Caso 4.....	136
5.5.	Caso 5.....	138

5.6.	Caso 6.....	142
5.7.	Caso 7.....	144
5.8.	Caso 8.....	145
5.9.	Caso 9.....	147
5.10.	Caso 10.....	148
6.	CONCLUSIONES GENERALES	149
7.	ANEXOS: HOJAS MAPLE EMPLEADAS	150
8.	REFERENCIAS	164

SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER

1. INTRODUCCION

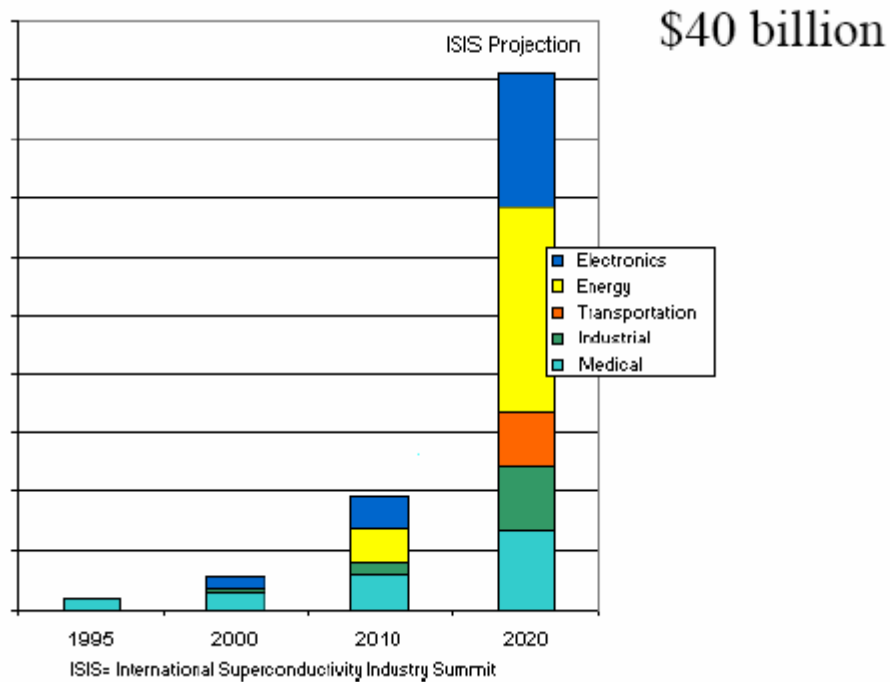
Por el término “Superconductividad” se entiende el conjunto de propiedades que presentan algunos materiales cuando se enfrían a muy bajas temperaturas. En particular la resistencia eléctrica se hace nula y el material conduce sin resistencia (superconduce). Además presentan otro tipo de propiedades, como por ejemplo los efectos Meissner y Josephson.

Estas propiedades fueron descubiertas cuando se dispuso de refrigerantes criogénicos que permitieron disminuir la temperatura de los materiales hasta los valores próximos al cero absoluto. Así Kammerling Onnes describió por primera vez la superconductividad enfriando mercurio por debajo de 4,2K.

El descubrimiento en 1986 de superconductividad en el sistema Ba La Cu O por encima de los 40K abrió el camino en la búsqueda de materiales superconductores entre los materiales cerámicos, consiguiéndose al poco tiempo materiales superconductores a temperaturas superiores a los 77K, que es la barrera tecnológica impuesta por el nitrógeno líquido. Esta nueva familia de superconductores llamados superconductores de alta temperatura (HTSC) incremento las expectativas de aplicación mostrando un enorme potencial de utilización en el campo de la industria.

Numerosos estudios en este campo de la superconductividad, dedican su esfuerzo a mejorar el conocimiento teórico, así como, a desarrollar aplicaciones prácticas de los materiales que presentan esta propiedad, creando poco a poco una nueva tecnología que abarca prácticamente todos los aspectos del conocimiento, implicando a físicos, químicos, ingenieros, matemáticos, etc.

Los superconductores ya han salido del ámbito de los laboratorios para introducirse en la industria, estando presentes en mayor o menor medida en diferentes sectores, como la electrónica, la instrumentación médica y científica, los procesos industriales, la energía eléctrica y el transporte. En la figura adjunta se muestra una proyección de negocio estimado en este tipo de industria para los próximos años.



Una aplicación que se vislumbra es la de la computadora criogénica. La tecnología ha sido establecida ya por IBM. Este tipo de computadora se aprovecha del hecho de que la superconductividad puede ser destruida por un campo magnético. Esto, que en otras aplicaciones es un inconveniente, en informática resulta ser una gran

ventaja, pues permite modificar la resistencia de un circuito desde cero hasta un valor pequeño pero finito, que es lo que constituye la base de un circuito de puertas lógicas.

Si pueden hacerse puertas de esta clase, entonces será posible también hacer circuitos de computación. La ausencia de resistencia en el estado superconductor contribuye a la operación rápida, y la rapidez es un requisito primordial para mejorar las computadoras convencionales, en las cuales se realizan operaciones en forma secuencial y la duración de una secuencia determina la velocidad de trabajo de dichas computadoras.

Por otro lado, en la técnica de comunicaciones la resistencia trae consigo otro inconveniente: el ruido. Toda resistencia en un amplificador genera ruido, lo cual impone un límite más bajo a la amplitud de señal que puede ser detectada. Por debajo de ese límite el ruido de resistencia ahoga la señal. Para las comunicaciones por satélite y espaciales sería muy interesante reducir el ruido de los amplificadores incorporando superconductores. Ya se están usando algunos dispositivos refrigerados con helio líquido; los amplificadores refrigerados con nitrógeno líquido podrán reducir seguramente el costo y ampliar el campo de aplicación. Un dispositivo amplificador que ya se ha logrado en la forma de "alta temperatura" con nitrógeno líquido en la Universidad de Strathclyde, Glasgow, es el superconductor de interferencia cuántica o SQUID (siglas de "superconductive quantum interference device"). Basados en las uniones Josephson, son captadores magnéticos extraordinariamente sensibles que permiten medir campos magnéticos y tensiones eléctricas increíblemente débiles, con una resolución del orden del picovolt (pV), o sea una billonésima de voltio.

Un SQUID es en esencia un detector extremadamente sensible a los cambios de intensidad del campo magnético. Sus usos abarcan desde aplicaciones militares hasta

médicas: detección súper precisa de las señales eléctricas del cerebro y el corazón, comprobación no destructiva de tuberías y puentes (la fatiga del metal produce una firma magnética peculiar), paleomagnetismo, sensores geológicos para prospecciones petrolíferas, equipos militares de detección de submarinos observando los cambios que éstos producen en el campo magnético de la Tierra cercano a ellos, observación de la circulación de la sangre cuando se le pone cerca de un vaso sanguíneo, etcétera.

El campo de los transportes por sustentación magnética también se ve afectado por las aplicaciones de los superconductores de alto campo crítico. En Japón ya han sido contruidos trenes en los que la sustentación se realiza por medio de electroimanes superconductores, de forma que no hay contacto entre el vehículo y el rail cuando el tren está en marcha. La ausencia de fuerzas de rozamiento permite obtener velocidades del orden de 400 km/h. Cabe prever que, con el escaso costo del enfriamiento del nitrógeno líquido comparado con el helio líquido, el interés de estos medios de transportes se verá rápidamente incrementado.

También pueden utilizarse en aparatos de formación de imágenes por resonancia magnética, más conocidos como RMN. Con esta técnica se coloca una sustancia en un campo magnético intenso que modifica el spin de los núcleos de determinados iones. Después, se somete a la muestra a una onda de radio que reorienta los núcleos. Al desaparecer la excitación se libera un pulso de energía que proporciona información sobre la estructura molecular de la sustancia, y que puede transformarse en una imagen mediante técnicas informáticas. El RMN es una herramienta casi indispensable para la formación de imágenes del cerebro, y con el advenimiento de los superconductores de alta temperatura podrá convertirse en una maquina mucho más pequeña y barata: los superconductores clásicos enfriados por helio requieren voluminosos y delicados

equipos de refrigeración. En cambio, el nitrógeno líquido es más fácil de producir y utilizar.

También se prevén usos en investigación espacial. En el espacio, protegidos de la luz solar, es fácil conseguir temperaturas dentro del rango funcional de los superconductores de alta temperatura. En el Shuttle, la parte que mira al Sol alcanza una temperatura de 122 °C, mientras que la parte que queda a la sombra puede llegar a -180 °C. En este aspecto la NASA ha financiado diferentes estudios sobre sensores y elementos de actuación electromecánicos con vistas a su utilización en naves espaciales.

Por otro lado uno de los mayores problemas de enviar astronautas a Marte será proteger a la tripulación de la radiación cósmica y las tormentas de viento solar, que podrían dañar gravemente su salud al no estar protegidos por la magnetosfera terrestre.

La idea, que aún se encuentra en sus primeras fases de desarrollo, sería crear una pequeña ionosfera artificial que cumpla la misma función que realiza en la Tierra su magnetosfera natural, gracias a la cual, el viento solar y su radiación nociva se desvían al espacio y puede haber vida en nuestro planeta.

Según los autores del estudio, capitaneados por la investigadora Ruth Bamford y con sede en el Laboratorio Rutherford Appleton de Chilton (Reino Unido), los astronautas podrían generar, con un material superconductor, un escudo de iones que detendría el viento solar, el cual viaja a más 300 kilómetros por segundo y está compuesto en su mayor parte por partículas a muy altas energías y cargadas eléctricamente.

Como se ve, la ingeniería médica, la física de las partículas, la fusión termonuclear, ya usuarias de electroimanes superconductores, serán campos de

aplicación de los nuevos superconductores. También se esperan nuevos usos en microelectrónica, electricidad y comunicaciones.

Aún quedan muchos retos por superar tanto desde el punto de vista teórico, como desde el punto de vista práctico de las aplicaciones.

En este sentido el presente trabajo es una contribución a la sistematización del diseño de una aplicación concreta, como puede ser el cojinete superconductor en levitación por efecto Meissner.

Este efecto se basa en una de las propiedades magnéticas de los materiales superconductores (o más bien de sus propiedades antimagnéticas) y es que si se acerca a ellos un imán, ambos experimentan una fuerza de repulsión, de manera que si diésemos al superconductor y al imán una forma física adecuada, se podría hacer desplazar (girar) uno de los elementos respecto del otro de manera estable y sin prácticamente fricción gracias a la levitación, constituyendo el conjunto lo que se denomina un cojinete superconductor.

Un cojinete de baja fricción de este tipo, podría ser muy útil en cualquier dispositivo donde las pérdidas de energía por rotación sean críticas hasta el punto de que, o bien ocasionen un mal funcionamiento del dispositivo como por ejemplo el caso de los giróscopos para instrumentos de navegación, o bien originen una disminución de su rendimiento que los hagan inútiles, como pueden ser los dispositivos de almacenamiento de energía por rotación, en los cuales el balance energético es crucial.

1.1. Historia de la superconductividad

La superconductividad fue descubierta a principios del siglo XX, cuando la disponibilidad de sistemas criogénicos y de gases licuados permitió realizar mediciones de la resistencia eléctrica a temperaturas cada vez más bajas, próximas al 0 K.

El holandés Kamerlingh Onnes fue quien en 1908 logró licuar y conservar helio líquido, empleando este baño para alcanzar temperaturas de hasta 1 K.



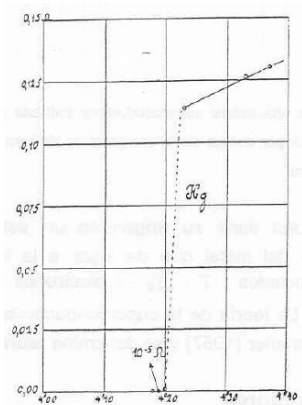
Heike Kamerlingh Onnes

Por aquellas fechas se sabía ya que los metales tienen una resistividad que disminuye de manera prácticamente lineal con la temperatura hasta unos 20 K, y se quería averiguar que ocurría con esta resistividad en las proximidades del cero absoluto.

Eligió el mercurio, elemento que podía conseguirse con un alto grado de pureza. De este modo, enfriando el mercurio a muy baja temperatura con la ayuda del helio líquido, pudo observar un fenómeno nuevo y totalmente inesperado: a una temperatura de 4,2 K, el mercurio pasaba bruscamente a un estado en el que, repentinamente, no ofrecía resistividad alguna al paso de la corriente eléctrica.

Esta transición se manifestaba por una caída muy brusca de la resistividad.

Kamerlingh Onnes había descubierto la superconductividad. Y también mantuvo la exclusiva en este campo, ya que Leyden (Holanda) fue, hasta 1923, el único lugar del mundo que disponía de helio líquido.



Gráfica original de Onnes.

Poco después se observó que la misma transición al estado de superconductor se producía en otros metales, como el plomo o el niobio, a temperaturas críticas ligeramente más altas. En todos los casos la temperatura que se requería era sólo un poco mayor que la del cero absoluto que, en la práctica, únicamente podía conseguirse sumergiendo un trozo del material en helio líquido, que hierve a 4,2 K a la presión atmosférica normal.

Onnes pensó en la posibilidad de construir un electroimán de alto campo y en 1913 construyó para ensayar la idea una bobina de plomo, que también presenta el mismo comportamiento que el Hg con la temperatura. Los resultados fueron desconcertantes. Si bien la bobina era superconductora en tanto que la corriente de excitación fuera pequeña, cuando el campo magnético excedía de una intensidad moderada el plomo pasaba siempre al estado resistivo. Experimentos ulteriores mostraron que todos los superconductores metálicos puros presentaban una intensidad

de campo crítica que les era propia y que estaba claramente definida, siendo usualmente menor de 0,1 T. Al llegar a este valor la superconductividad se extinguía súbitamente.

Posteriormente, a partir de los años 1930, la superconductividad se observó también en cuerpos compuestos, principalmente en aleaciones intermetálicas.

En 1933 W. Meissner y R. Ochsenfeld mostraron que un superconductor es más que un conductor perfecto, y que también puede llegar a comportarse como un material diamagnético perfecto, anulando por exclusión el campo magnético en su interior.



**Walther Meissner
(1882-1974)**

En su honor este efecto se conoce hoy en día como efecto Meissner.

Los hermanos Fritz y Heinz London desarrollaron en 1935 una teoría fenomenológica de la superconductividad. Obtuvieron sus ecuaciones a partir de las ecuaciones de Maxwell y dos ecuaciones complementarias para el efecto Meissner, y así demostraron que el campo magnético decae en el interior del superconductor con una longitud característica conocida como longitud de penetración. Además Fritz London sugirió que la superconductividad es una manifestación de la mecánica cuántica operando a escala microscópica.

En la década de los 50 se hacen enormes progresos en la búsqueda de materiales superconductores con temperaturas críticas mayores y campos críticos más intensos, especialmente en los grandes laboratorios americanos tales como los de la General Electric, Bell Telephone, Westinghouse, etc., dando lugar a la aparición de superconductores tipo II, caracterizados por una expulsión parcial del flujo magnético conservándose la resistividad cero, o dicho de otra manera, algunos superconductores dejan de ser diamagnéticos perfectos y dejan entrar parte del campo magnético pero de una manera muy particular: en cuantos de flujo o fluxoides.

Este tipo de materiales normalmente son aleaciones intermetálicas que poseen temperaturas críticas más altas y campos magnéticos críticos más intensos que los correspondientes a superconductores tipo I.

El primer intento de explicación de lo que ocurría en las entrañas de un superconductor se debe a Frölich en 1950. Se basó en unos experimentos que pusieron de manifiesto que la temperatura de transición tenía mucho que ver con la masa de los iones del material, revelando también un comportamiento muy particular de la capacidad calorífica de estos materiales para temperaturas inferiores o iguales a la transición superconductora.

Aunque la teoría básica del comportamiento de un superconductor respecto un campo magnético externo fue descrita por el físico ruso Alexei A. Abrikosov en los años cincuenta, en base a los trabajos de Ginzburg y Landau, hizo falta esperar a 1957 para que J. Bardeen, L. Cooper y J. R. Schrieffer elaboraran una teoría (conocida como BCS, por las iniciales de sus apellidos) que logró explicar, desde la microscopía, muchas de las propiedades observadas experimentalmente del fenómeno de la superconductividad. Aplicando las leyes de la mecánica cuántica explicaron la aparición

de la superconductividad, con ello demostraron que la superconductividad es una manifestación macroscópica de propiedades cuánticas de la materia.



La teoría BCS parte de la existencia de los "Pares de Cooper", como una pareja de electrones con momento y spin opuestos unidos por una fuerza de tipo atractivo producida por la interacción con la red de iones positivos en la cual ellos se mueven (fonones). Así la superconductividad aparece como consecuencia de la existencia de los pares de Cooper mediados por la interacción electrón-fonón.

Así mismo, la teoría BCS permite determinar la distancia promedio a la cual se encuentran los dos electrones que forman el par de Cooper, conocida como longitud de coherencia. Este concepto había sido introducido por los teóricos rusos Ginzburg y Landau en 1950 en una descripción fenomenológica de la superconductividad. Los parámetros longitud de penetración y longitud de coherencia son fundamentales en la superconductividad y aparecen en forma natural en el marco de la teoría BCS.

La elevación de las temperaturas críticas (T_c) fue prosiguiendo a lo largo de los años, de una manera lenta pero bastante regular.

En 1962, Josephson predijo la unión que lleva su nombre (y que posteriormente fue confirmada experimentalmente), un dispositivo que permite la medida extremadamente precisa de campos magnéticos.



**Brian David
Josephson**

En 1973, D.C. Johnston y sus colegas obtuvieron un resultado más significativo con un óxido de titanio y litio (Li-Ti-O) : una temperatura crítica de 13,7 K. En 1975, A.W. Sleight y sus colaboradores observaron una transición a 13 K en un compuesto de valencia mixta: un óxido de bario y plomo dopado con bismuto (BaPbBiO).

En 1973 la temperatura crítica mas elevada fue de 23,3 K, con una aleación de niobio y germanio (Nb Ge). Trece años mas tarde la situación era la misma y la mayoría de los físicos habían acabado por convencerse de que no podía llegarse mucho más lejos.

En 1986, Alex Muller y George Bednorz (ganadores del Nobel de Física en 1987) detectaron superconductividad en una nueva cerámica, un óxido de bario/lantano/cobre (LaBa)₂CuO₄ a una temperatura T_c superior a 35 K.



J. Georg Bednorz



K. Alexander Müller

En 1987 Maw-Kuen Wu y Paul C. W. Chu descubrieron una cerámica de óxido de itrio, bario y cobre (conocida abreviadamente como YBaCuO) que era superconductora a 93 grados Kelvin.

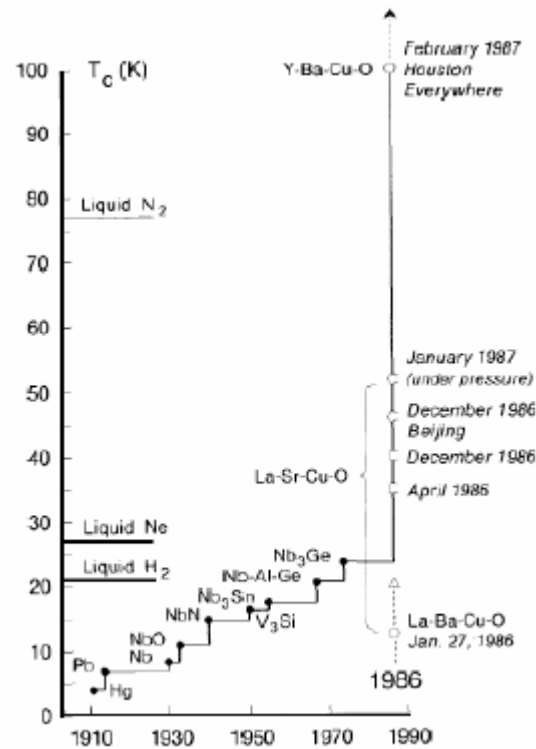
Este ultimo descubrimiento, significaba que estos materiales podían hacerse superconductores refrigerándolos con nitrógeno liquido. Hay refrigeradores de laboratorio no excesivamente grandes capaces de enfriarlos por debajo de la temperatura crítica. Esto abarata los costos de refrigeración en por lo menos un factor 10, y todavía más los costos de las instalaciones que implican el almacenamiento y la transferencia del He líquido. Por todo el mundo, los científicos continuaron descubriendo centenares de cerámicas con temperaturas críticas cada vez mayores.

Por otra parte, a partir del descubrimiento de los fullerenos, una nueva forma cristalina del carbono, diversos grupos se interesaron en las propiedades de transporte del denominado C60, llegando a encontrar que ciertas sales de C60 eran superconductoras pero a pesar de muchos esfuerzos en la búsqueda de otros tipo de materiales son los cupratos los materiales que, a la fecha, muestran T_c por encima de los 100 K.

Desde 1986, fecha del descubrimiento de los superconductores de temperaturas relativamente “altas” se plantean difíciles problemas a los teóricos. Todavía no se sabe si el mecanismo responsable del agrupamiento de los electrones por pares, que está en el origen de la superconductividad, es o no similar al de los superconductores convencionales ó clásicos.

A pesar de haberse logrado grandes avances en el entendimiento de las propiedades características de estos nuevos materiales, hoy en día no existe una teoría que logre explicar el mecanismo que produce y confiere las propiedades del estado superconductor de “alta temperatura”. Esta indefinición permite aún soñar con la posibilidad de que se pueda tener un material superconductor a temperatura ambiente ya que no existe en este momento un límite teórico que impida que esta nueva

superconductividad se desarrolle a temperaturas aún mayores que la temperatura ambiente. Estando el récord actual de temperatura crítica superconductora lo tienen los cupratos basados en elemento mercurio y dopados con flúor, que alcanzan los 138 K (-135 C) a presión ambiente y los 166 K (-107 C) bajo presiones cercanas a las 20.000 atmósferas.



1.2. Tipos de superconductores

1.2.1. Según composición química

Podemos dividir los materiales superconductores conocidos en cuanto a su composición química en tres grandes grupos.

1. Elementos metálicos que presentan esta propiedad. No ofrecen grandes posibilidades de aplicaciones prácticas
2. Aleaciones, compuestos intermetálicos y semiconductores. Las aleaciones contienen elementos de transición como el Nb-Zr, Nb-Ti y Mo-Re. Los compuestos intermetálicos presentan un campo magnético crítico muy elevado (210000 Oe ó 16711269 Av/m)
3. Superconductores de alta temperatura (HTSC=High Temperature Superconductors). Los primeros HTSC consistían en óxidos de cobre con bario y lantano. El rango de T_c para los HTSC llega hasta los 125 K (Tl₂Ba₂Ca₂Cu₃O₁₀).

KNOWN SUPERCONDUCTIVE ELEMENTS

■ BLUE = AT AMBIENT PRESSURE
■ GREEN = ONLY UNDER HIGH PRESSURE

1	IA																IIA										IIIA										IVA										VA										VIA										VIIA										0
1	H																																																																			2									
3	Li	4	Be																	5	B	6	C	7	N	8	O	9	F	10	Ne																																														
11	Na	12	Mg																	13	Al	14	Si	15	P	16	S	17	Cl	18	Ar																																														
19	K	20	Ca	21	Sc	22	Ti	23	V	24	Cr	25	Mn	26	Fe	27	Co	28	Ni	29	Cu	30	Zn	31	Ga	32	Ge	33	As	34	Se	35	Br	36	Kr																																										
37	Rb	38	Sr	39	Y	40	Zr	41	Nb	42	Mo	43	Tc	44	Ru	45	Rh	46	Pd	47	Ag	48	Cd	49	In	50	Sn	51	Sb	52	Te	53	I	54	Xe																																										
55	Cs	56	Ba	57	La	72	Hf	73	Ta	74	W	75	Re	76	Os	77	Ir	78	Pt	79	Au	80	Hg	81	Tl	82	Pb	83	Bi	84	Po	85	At	86	Rn																																										
87	Fr	88	Ra	89	Ac	104	Rf	105	Ha	106	106	107	107	108	108	109	109	110	110	111	111	112	112																																																						

SUPERCONDUCTORS.ORG

* Lanthanide Series

+ Actinide Series

58	Ce	59	Pr	60	Nd	61	Pm	62	Sm	63	Eu	64	Gd	65	Tb	66	Dy	67	Ho	68	Er	69	Tm	70	Yb	71	Lu
90	Th	91	Pa	92	U	93	Np	94	Pu	95	Am	96	Cm	97	Bk	98	Cf	99	Es	100	Fm	101	Md	102	No	103	Lr

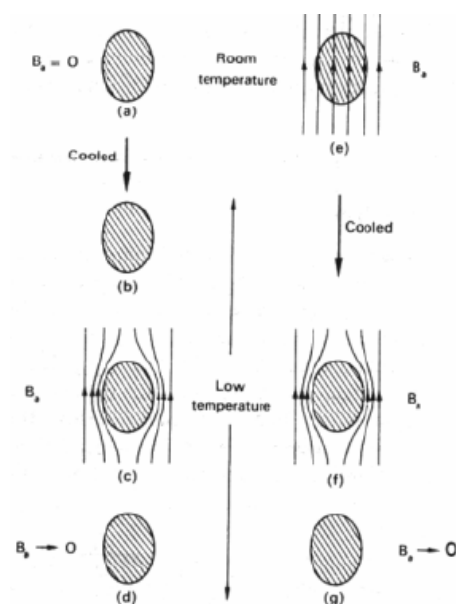
[Terry P. Orlando]

1.2.2. Según comportamiento al campo magnético

Los superconductores se clasifican, según su comportamiento frente al campo magnético aplicado, como superconductores de tipo I y de tipo II.

Los superconductores de tipo I, también conocidos como superconductores blandos, presentan un valor de T_c y de H_c bajos (aquí el origen de blandos) para cualquier aplicación práctica. Estos son conductores perfectos de la electricidad por debajo de T_c , pero pierden su propiedad a un valor crítico del campo magnético por debajo de 1500 Oe (119366 Av/m). Algunos elementos metálicos como el plomo, estaño, mercurio y el aluminio pertenecen a este grupo.

Describiendo su comportamiento frente a un campo exterior aplicado, podemos decir que, si un cilindro largo de un superconductor de tipo I como Pb o Sn se coloca en un campo magnético a temperatura ambiente el campo magnético penetra normalmente a través del metal. Sin embargo, si la temperatura del conductor del tipo I se reduce por debajo de su T_c (7,19 K para el Pb) y si el campo magnético esta por debajo de H_c , el campo magnético es expulsado de la muestra con excepción de una capa de penetración superficial muy fina de unos 10^{-4} mm de espesor.

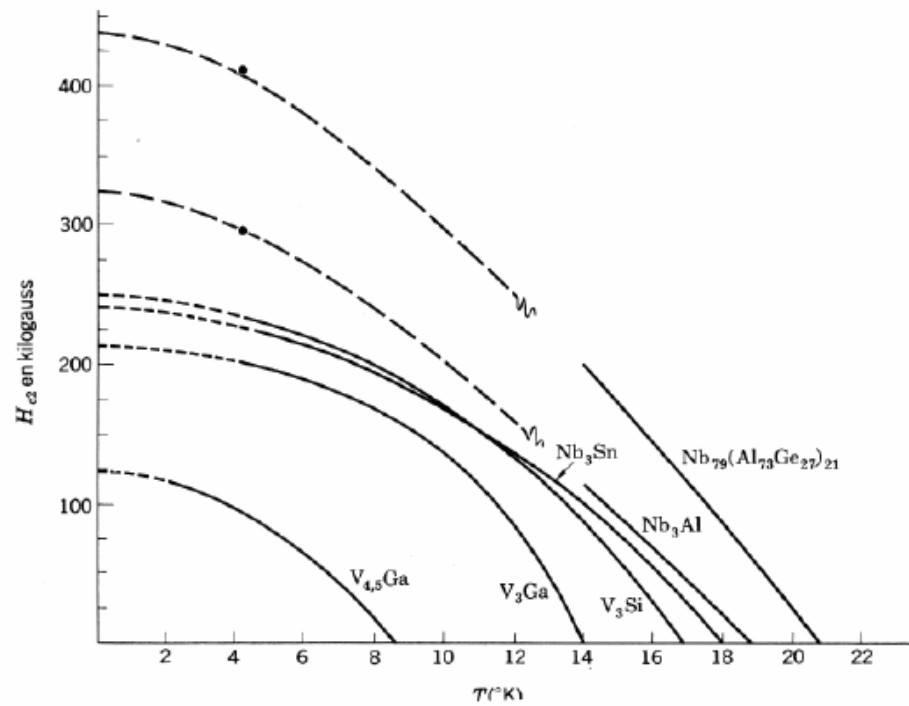


[Terry P. Orlando]

Esta propiedad de expulsión de un campo magnético en el estado de superconducción recibe el nombre de Efecto Meissner.

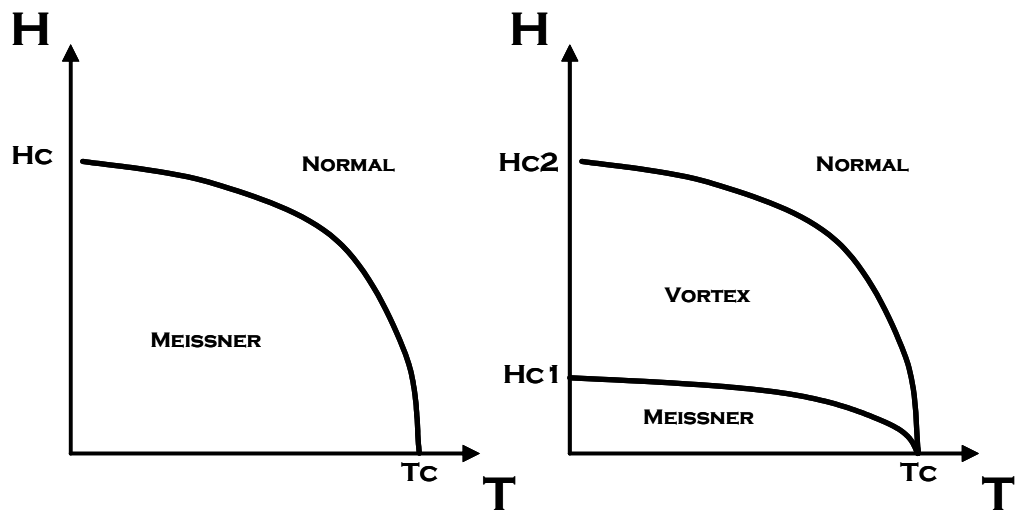
Así, los campos magnéticos resultan rechazados del interior del superconductor debido a la formación de corrientes de superficie. La magnetización de un superconductor se opone al campo magnético externo, y la susceptibilidad magnética tiene un valor negativo máximo. Esto significa que un superconductor exhibe un diamagnetismo perfecto, lo cual es una propiedad esencial del estado superconductor.

Los superconductores del tipo I son poco útiles para transportar la corriente eléctrica, ya que la corriente sólo puede fluir por la capa superficial externa de una muestra conductora. La razón por la cual sucede esto es que el campo magnético solo puede penetrar la capa superficial, y la corriente sólo puede fluir por esta capa.



[Terry P. Orlando]

Los superconductores de tipo II se comportan de forma diferente ante un campo magnético a temperaturas por debajo de la temperatura crítica.



[Terry P. Orlando]

Estos superconductores son diamagnéticos, como los superconductores de tipo I, hasta un valor de un campo magnético aplicado llamado campo crítico inferior H_{c1} , y de este modo el flujo magnético es rechazado del material. Por encima de H_{c1} el campo empieza a penetrar en el superconductor de tipo II y continua así hasta que alcanza el campo crítico superior H_{c2} . En el intervalo entre H_{c1} y H_{c2} el superconductor está en estado mixto y por encima de H_{c2} vuelve a su estado normal.

En los superconductores de tipo II, por debajo de H_{c1} , los campos magnéticos se comportan de igual manera que en los tipo I. Sin embargo, si el campo se encuentra entre H_{c1} y H_{c2} (estado mixto), la corriente puede ser transportada por el interior del conductor.

Cuando se aplica un campo magnético entre H_{c1} y H_{c2} , el campo atraviesa el volumen del superconductor en forma de haces de flujos cuantizados e individuales, llamados fluxoides. Una supercorriente cilíndrica en torbellino rodea cada fluxoide. Con el aumento de la fuerza del campo magnético, más y más fluxoides entran en el superconductor y se constituyen en una formación periódica. Para el valor de H_{c2} la estructura a base de vórtices de supercorriente colapsa y el material vuelve a su estado de la conducción normal.

En la región comprendida entre H_{c1} y H_{c2} el superconductor puede conducir corriente eléctrica dentro del núcleo del material y de esta forma, dicha banda de valores del campo magnético puede ser usada para superconductores de alto campo y alta corriente, como por ejemplo el NiTi y Ni₃Sb que son superconductores del tipo II.

Entonces el efecto Meissner se ve alterado por el valor del campo magnético aplicado, por el tipo de material del que esta hecho el superconductor, pero también se

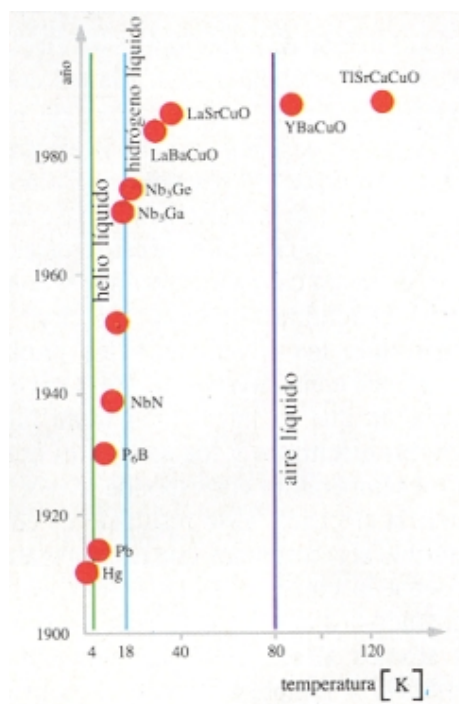
ve afectado por otras variables menos evidentes, como la forma del superconductor, el tamaño y la presencia de impurezas.

1.2.3. Según la temperatura crítica

Desde que la superconductividad fue descubierta en 1911, la búsqueda de nuevos superconductores con T_c mayor, fue un reto.

El físico estadounidense de origen alemán B. Matthias se destacó como uno de los más activos en este campo, desarrollando aleaciones y compuestos superconductores con grandes campos y corrientes críticas y aumentando las temperaturas críticas, aunque éstas nunca llegaron a ser muy altas. Los trabajos de Matthias llevaron en 1973 al desarrollo de un material compuesto por niobio (Nb) y germanio (Ge), cuya fórmula química es $Nb_3 Ge$, con una temperatura crítica de 23 K. Este fue durante muchos años el record de alta temperatura crítica en materia de superconductividad aunque todavía exigía que los materiales fueran enfriados a la temperatura del helio líquido (4,2 K), lo cual era muy caro y necesitaba de una tecnología muy sofisticada

Fue en 1986 cuando se descubrió un compuesto a base de óxidos de cobre, lantano y bario (conocida abreviadamente como $BaLaCuO$) con T_c de 35 K el cual se considera punto de partida de los materiales llamados superconductores de alta temperatura los cuales muestran la transición de fase a temperaturas superiores a la transición líquido-vapor del nitrógeno líquido.

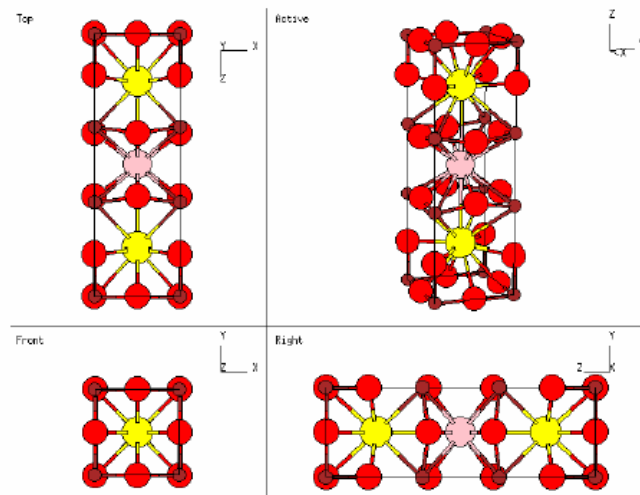


Esto ocasionó un gran abaratamiento de los costos en el estudio de estos materiales ya que el nitrógeno líquido es diez veces mas barato que el helio líquido así como el descubrimiento de estos materiales fue un paso importante porque se comenzó a pensar en aplicaciones de los superconductores a gran escala, abriendo la esperanza a la existencia de materiales superconductores a temperatura ambiente, lo que supondría una revolución en la industria del siglo XXI.

La mayor desventaja de estos materiales HTSC es su composición cerámica, lo que lo hace poco apropiado para fabricar por ejemplo cables mediante deformación plástica, que seria en principio el uso más obvio de este tipo de materiales. Sin embargo se han desarrollado técnicas nuevas para la fabricación de cintas como IBAD (deposición asistida mediante haz de iones) mediante la cual se han logrado cables de longitudes mayores de 1 kilómetro.

El descubrimiento de los superconductores de alta temperatura (HTSC) provocó una fiebre de estudios sobre el material en tres direcciones preferentemente.

1. La primera fue la búsqueda de nuevos compuestos a fin de obtener una T_c cada vez mas elevada. En 1987 se superó la temperatura del nitrógeno líquido (77 K) con un compuesto a base de itrio, bario y cobre que sigue siendo el mas estudiado ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$). La estructura cristalina de estos materiales (en forma de perovskita) es fundamental para entender su elevada temperatura de transición. Básicamente esta estructura forma superautopistas para los electrones que circulan sin resistencia.



[Terry P. Orlando]

2. La segunda dirección es la mejora de los métodos para sintetizar estos materiales.
3. La tercera es la comprensión de sus propiedades físicas (eléctricas, magnéticas y ópticas).

Este estudio se realiza para las dos fases:

- a. Fase normal (por encima de la temperatura crítica), en la que se intenta saber si estos nuevos óxidos metálicos pueden clasificarse como metales tradicionales.

- b. Fase superconductora (por debajo de T_c), en la que se intenta determinar si las propiedades de estos nuevos compuestos pueden ser o no descritos por la teoría clásica BCS.

La síntesis de estos materiales y su estudio sigue siendo un campo importante de investigaciones.

Las observaciones de planos atómicos sucesivos en microscopios electrónicos han relevado a menudo, la existencia de nuevas fases y se especula con la posibilidad de sintetizarlos. También se correlaciona cada vez mejor los defectos en sentido amplio (diferencias estiquiométricas, impurezas) con el desorden y las propiedades de los distintos compuestos.

Las estructuras cristalográficas de estas familias de óxidos de cobre han resultado ser bastante próximas y se caracterizan por la presencia de planos cobre-oxígeno llamados planos CuO_2 .

Debemos hacer constar que también se han sintetizado óxidos de estructuras cúbicas sin cobre o compuestos a base de carbono, cuya estructura tridimensional y composición química no se asemejan a las de los óxidos a base de cobre, es decir, hay varias clases de superconductores de alta temperatura crítica.

Los nuevos compuestos mas prometedores vienen en forma de películas delgadas, debido a que en los cristales usuales se pueden observar numerosos defectos de todo tipo y a todas las escalas susceptibles de influir fuertemente en las propiedades físicas y en cambio en las capas delgadas se pueden aislar un defecto específico, estudiarlo e incluso en ciertos casos sacarle provecho.

Es también en las capas delgadas donde hoy se registran las mayores densidades de corriente (intensidad por sección transversal). Las altas densidades de corriente son un requisito indispensable para las aplicaciones que necesitan corrientes importantes o campos magnéticos intensos.

Hay un límite absoluto para la densidad de corriente que puede recorrer un superconductor sin disipación de energía. Según la teoría BCS, esta limitación viene dada por la energía cinética que adquieren los pares de Cooper, cuando esta energía supera la de desacoplamiento, destruye los pares y con ellos la superconductividad y restaura el efecto Joule.

También hay otras causas, como impurezas o defectos cristalinos, que hacen que la densidad de corriente crítica medida sea inferior al límite teórico, estimado en 10^{14} A/m².

Pero es muy frecuente que la corriente crítica medida disminuya en presencia de un campo magnético, por razones que tienen que ver con la naturaleza de los defectos, que limitan su valor y con la aparición en un campo magnético de nuevas fuentes de disipación todavía mal conocidas.

Los físicos tratan de comprender mejor las propiedades de estos compuestos, que son muchos mas complejas que las de los elementos superconductores a baja temperatura (clásicos).

La estructura cristalina natural de los superconductores de alta temperatura, comparada con la de la mayoría de superconductores clásicos que son generalmente metales puros o aleaciones metálicas, es compleja. Esta formada por un apilamiento de capas de átomos de distinta naturaleza.

Para comprender mejor el papel de estas capas, los investigadores empezaron a manipular dichos óxidos y a fabricar unas estructuras artificiales, las superredes superconductoras. Estas superredes están formadas por capas delgadas del superconductor a estudiar, alternando con capas de otros materiales, cuya composición y cuyo espesor se hacen variar a voluntad.

Para comprender mejor los nuevos materiales que han ido apareciendo en los últimos años hay que dilucidar la relación entre su estructura cristalina y su superconductividad. Ahí es donde ha resultado muy útil la fabricación "a medida" de apilamientos de finas capas de tales superconductores: las superredes.

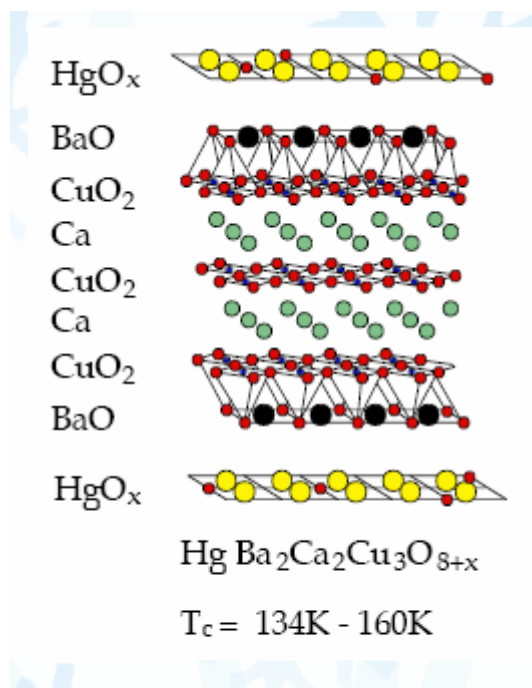
Partiendo de la idea de que los óxidos superconductores de alta temperatura cristalina tienen por sí mismos una estructura en capas, era tentador para el experimentador invertir en la formación de dichas capas, modificar su apilamiento natural y su composición química, a fin de construir toda una panoplia de materiales, las superredes, auténticos híbridos que ayudarían a forjar los conceptos importantes.

Estas estructuras artificiales están formadas por superposición de capas ultradelgadas de uno o más compuestos, superconductores o no. Cada capa consta de un número variable de planos atómicos, que puede estar comprendido entre uno y varias decenas. Cuando una capa es lo bastante gruesa, los planos atómicos se disponen por sí mismos como en el material masivo, y se está en presencia de una doble periodicidad en la dirección perpendicular a las capas. La periodicidad creada artificialmente, de ahí el nombre de superred.

Las superredes de óxidos superconductores fueron realizadas por primera vez en la Universidad de Ginebra en 1989 y luego muy rápidamente al año siguiente en Estados Unidos.

La temperatura crítica disminuye rápidamente al aumentar la distancia entre capas superconductoras sucesivas. Esta explosión de actividades esta ligada a las sorprendentes posibilidades que ofrecen las técnicas de posición de capas delgadas, por pulverización catódica o por chorros moleculares. Esta ultima técnica debe sus rápidos progresos a las exigencias de la fabricación de las superredes semiconductoras.

Esta técnica consiste en lo siguiente; dentro de un recinto al vacío, se dirigen uno o varios chorros de átomos o de moléculas sobre un substrato en el que se depositan. A medida que los átomos van llegando, se va construyendo el cristal, que puede formarse sin ningún defecto si el proceso se lleva cabo cuidadosamente. Para formar las superredes de óxidos superconductores, los chorros contienen una mezcla de los átomos necesarios en proporciones calculadas de antemano. El amontonamiento de los átomos puede detenerse en todo momento tras el deposito de un cierto numero de planos atómicos, para proceder luego al deposito de otra capa de distinta composición. Aplicando tales técnicas a los óxidos superconductores, cabe pensar en fabricar estructuras dentro de las cuales se ha modificado el numero de planos CuO_2 de una malla elemental (en los materiales masivos, la temperatura crítica depende del numero de planos de CuO_2 por malla elemental). También se puede cambiar la secuencia de apilamiento entre los grupos de planos de CuO_2 y luego observar como estos cambios estructurales modifican la temperatura crítica.



Estructura cristalina de un cuprato superconductor de 3 capas

[phy.cam.ac.uk]

Los primeros resultados de los experimentos, en la Universidad de Ginebra 1989, superaron las previsiones mas optimistas. El examen por rayos X demostró que las superredes preparadas por pulverización catódica tienen una calidad cristalina superior a la de las capas simples. Se llega incluso a depositar las capas malla elemental por malla elemental, lo cual corresponde a espesores extremadamente débiles, del orden de 12 Angströms, el compuesto mas utilizado en estos experimentos ha sido, YBaCuO.

Por medio de estas superredes, en las que alternan capas de YBaCuO y de PrBaCuO se ha estudiado la evolución de las propiedades superconductoras con el espesor de las capas. En 1990 se demuestra que la temperatura crítica decrece rápidamente cuando aumenta la distancia entre los grupos de planos de CuO₂.

La superconductividad aparece pues a una temperatura mucho mas baja en una capa formada por una malla aislada de YBaCuO que en una capa gruesa cuya temperatura es de 90 K. Para obtener una elevada temperatura crítica parece importante apilar las mallas lo cual sugiere que las mallas no se comportan independientemente unas de otras.

Se produce un nuevo fenómeno que es un "ensanchamiento" de la transición, el material no pasa bruscamente el estado superconductor a una temperatura dada sino que va perdiendo paulatinamente su resistencia al disminuir la temperatura.

La interpretación de estos resultados es objeto todavía de muchas investigaciones. El cambio de la temperatura de transición superconductora al separarse los planos de CuO₂ indica que el acoplamiento entre planos contribuye a aumentar esta temperatura. No obstante, todavía no se ha descubierto la manera de cómo el acoplamiento modifica la temperatura crítica. El ensanchamiento de la transición esta vinculado a la aparición espontánea de "vórtices" de corriente en los superconductores de dos dimensiones.

En los superconductores convencionales, los vórtices sólo aparecen en presencia de campo magnético y pueden visualizarse como largos torbellinos de corriente que atraviesen el material.

En los óxidos superconductores, sin embargo, la situación es distinta. Ante todo, en las capas cuasidimensionales, los vórtices pueden aparecer espontáneamente en ausencia de campo magnético.

Los vórtices nacen por pares y cada vórtice esta ligado a un antivórtice en el que la corriente circula en sentido contrario. Como la energía de un vórtice es proporcional a su longitud, cuanto mas delgadas son las capas, mas fácil es crear estos pares

vórtice/antivórtice. A baja temperatura, ambos están ligados. Al aumentar la temperatura es de esperar que estos pares se disocien a una cierta temperatura característica. El punto crucial es que estos vórtices se volverán independientes, unos de otros, por encima de esta temperatura. Dicho movimiento consume energía y todo ocurre como si en el material apreciase una resistencia eléctrica. La temperatura a la que se disocian los vórtices es pues la temperatura de transición del sistema ya que, por encima de ella, la resistencia deja de ser nula. Lo esencial es que esa temperatura de transición es mas baja que la temperatura crítica del material grueso. Cuanto mas delgada es la capa, mas se reduce la temperatura crítica. Así, el intervalo de temperatura en el que se encuentran los vórtices libres aumenta: es el "ensanchamiento" observado por los investigadores. Esta transición, se llamada BKT. Las superredes claro esta, son los instrumentos idóneos para resolver la controversia, ya que permiten relacionar de un modo continuo la malla única y el superconductor masivo.

En los superconductores de alta temperatura, al aplicarles un campo de unos 10 Tesla, la resistencia del material podía hacerse hasta cien veces superior a la del cobre. La razón se descubrió pronto: los vórtices en las cerámicas superconductoras no permanecen fijos en una estructura triangular rígida, sino que se van desplazando caóticamente. Puesto que cada vórtice esta constituido por una corriente eléctrica que circula alrededor de un núcleo de materia normal no superconductora, al aplicar una corriente eléctrica adicional a la muestra esta se suma a la corriente que circula a un lado del vórtice y se resta a la del otro. Como resultado se produce una fuerza que actúa sobre la línea de vórtice semejante a la que aparece en el ala de un avión. Si las líneas de vórtices se mueven debido a esta fuerza gastaran energía de la corriente y aparecerá una resistencia eléctrica. Hoy en día se trabaja intensamente para solucionar este problema.

Una de las estrategias que mas éxito ha tenido ha sido la de fijar los vórtices mediante impurezas estratégicamente colocadas (dopaje): de esta forma consigue equipararse su comportamiento al de un superconductor clásico, al impedir el desplazamiento de los vórtices y el que este movimiento extraiga energía de la corriente suministrada.

1.3. Ecuaciones de London

Las ecuaciones de Maxwell implican que un campo magnético aplicado que varía con el tiempo induce un campo eléctrico. En un superconductor, este campo eléctrico da un aumento de corrientes persistentes denominadas supercorrientes, las cuales son análogas a las corrientes de Foucault inducidas en metales normales. Estas supercorrientes generan un campo magnético que se opone al campo aplicado en el interior del material, exactamente cancelando el flujo magnético si el campo aplicado es suficientemente débil. Esta total expulsión del flujo magnético interno es conocido como el efecto Meissner-Ochsenfeld y ocurre siempre que la potencia del campo aplicado este por debajo de un valor crítico B_c .

Debido a que el campo magnético dentro del conductor es cero, los superconductores son considerados como diamagnéticos perfectos. En la superficie del superconductor hay un descenso exponencial del campo magnético. Es la profundidad de penetración de London la que cuantifica este descenso.

La teoría de London relativa al comportamiento electromagnético de los superconductores propone ecuaciones basadas en el modelo de dos fluidos para explicar el efecto Meissner-Ochsenfeld y predice la profundidad de penetración del campo magnético dentro del conductor. Como ya hemos dicho el campo disminuye exponencialmente dentro del superconductor, con una longitud característica de disminución λ_L denominada profundidad de penetración.

El modelo de los dos fluidos fue originalmente desarrollado para entender las propiedades de superfluido del helio. Este modelo considerando los átomos del helio en

dos estados, una fracción de ellos en estado “normal” y el resto en estado condensado Bose-Einstein, explica las extraordinarias propiedades de superfluido del helio. En 1934, Gorter y Casimer aplicaron este modelo a la superconductividad, básicamente definiendo la densidad electrónica como $n = n_n + n_s$ donde n_n y n_s representan las densidades electrónicas del estado normal y la del estado superconductor respectivamente. Por ultimo, el modelo permite manejar de manera diferente los electrones normales y superconductores cuando se pretende obtener las propiedades de los superconductores.

1.3.1.Ecuaciones de Maxwell

El estudio de los campos electromagnéticos puede ser caracterizado completamente por medio de cinco magnitudes vectoriales y una magnitud escalar:

[Heinz E. Knoepfel]

Campo eléctrico (o intensidad electrica)

E [V/m]

Campo magnético (o intensidad magnética)

H [A/m]

Densidad de flujo eléctrico (o inducción eléctrica o desplazamiento)

D [Coulomb/m²]

Densidad de flujo magnético (o inducción magnética)

B [T, Wb/m²]

Densidad de corriente

J [A/m²]

Densidad volumétrica de carga

$$\rho \text{ [Q/m}^3\text{]}$$

La forma diferencial de las leyes del electromagnetismo es conocida como ecuaciones de Maxwell, donde cada una de ellas relata localmente el comportamiento eléctrico y magnético. Dichas ecuaciones en forma diferencial, son las siguientes:

}En unidades del SI

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Y las relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{J} = \rho_v \vec{u} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

Estas relaciones describen las propiedades macroscópicas del medio en términos de permeabilidad μ , conductibilidad σ y constante dieléctrica ϵ . Las ecuaciones de Maxwell son validas cualquiera que sea la naturaleza de las cantidades ϵ , μ , σ : de hecho, pueden ser constantes o pueden exhibir comportamiento que depende de la dirección o pueden depender del campo.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell pueden ser simplificadas omitiendo ciertos términos con respecto a la dinámica de los procesos.

a. Electrostática y magnetostática :

No hay corriente: $\mathbf{J}=0$, no hay cambio en la magnitud de la inducción magnética

$\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$, no hay cambio en la inducción eléctrica $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$.

Quedando las ecuaciones de la electrostática como:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad .$$

Y las ecuaciones de la magnetostática:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad .$$

Como se puede observar, no existe conexión entre las ecuaciones de la electricidad y del magnetismo.

b. Campos estacionarios (corriente continua):

Tenemos corriente: $\mathbf{J} \neq 0$, pero los campos magnético y eléctrico no varían con el tiempo: $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ y $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$.

En este caso las ecuaciones de Maxwell se simplifican de la siguiente forma:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

c. Campos Quasi-estacionarios (corriente alterna):

Tenemos corriente eléctrica: $\mathbf{J} \neq 0$, y el campo magnético cambia con el tiempo $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$, pero la velocidad de cambio del campo eléctrico puede ser despreciada $\partial \mathbf{D} / \partial t \approx 0$.

En este caso las ecuaciones de Maxwell se pueden simplificar según:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

1.3.2. Derivación de las ecuaciones de London

[Serena] Fritz y Heinz London realizaron una proposición en 1930 que supuso un punto de ruptura en el área de la superconductividad. Proporcionaron la primera descripción analítica de la electrodinámica de la superconductividad, un fenómeno a baja temperatura que por primera vez se observó experimentalmente al principio de 1900. En este capítulo, las ecuaciones de London se derivan y analizan utilizando las ecuaciones de Maxwell. Basándose en el modelo de la superconductividad de los dos fluidos como ya dijimos al principio del mismo, estas expresiones explican el efecto Meissner-Ochsenfeld y predicen la profundidad de penetración de un campo magnético externo dentro de un superconductor.

Las investigaciones de Vitaly Ginzburg y Lev Landau en 1950 dieron como resultado el segundo gran evento en la descripción de la superconductividad al proporcionar una relación derivada más intuitiva de las ecuaciones de London. Este hito también se revisa al final de este capítulo a través de la extracción de la teoría de London desde la teoría Ginzburg-Landau

Las ecuaciones de Maxwell :

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \frac{-1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times \bar{E} \quad [1]$$

Especifica el campo eléctrico que surge de aplicar un campo magnético variable con el tiempo.

El resto de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\bar{J}_s = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \bar{B} \quad [2]$$

Relaciona la densidad de corriente con ese campo eléctrico.

Junto con relaciones básicas Newtonianas, la ecuación de Maxwell, [1] es la base de la derivación de las ecuaciones de London. Igualando la segunda ley de Newton con la fuerza eléctrica resultante de una portadora de superconducción con masa m, carga e-, y dentro de un campo eléctrico E, resulta:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -e\mathbf{E}$$

Que es la ecuación del movimiento de la portadora. Siendo \mathbf{v}_s la velocidad de la portadora de superconducción.

La densidad de corriente de conductores normales con conductividad distinta de cero, viene definida por:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Donde σ representa un equilibrio de fuerzas ejercidas por el campo eléctrico y aspectos resistivos de los conductores. Debido a que los superconductores no presentan la contrapartida resistiva, la ecuación aplicable a tales conductores es:

$$\mathbf{J}_s = -en_s \mathbf{v}_s$$

Haciendo la derivada respecto al tiempo de esta densidad de supercorriente, donde la densidad local de portadores superconductores es n_s , conecta la ecuación portadora de movimiento con la densidad de corriente dando como resultado la primera ecuación de London:

$$\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \quad [3]$$

Haciendo el rotacional de ambos lados de la primera ecuación de London y aplicando la ecuación de Maxwell [1], resulta:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n_s e^2} (\nabla \times \frac{d\mathbf{J}_s}{dt}) &= \nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{mc}{n_s e^2} (\nabla \times \frac{d\mathbf{J}_s}{dt}) + \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad [4]$$

Una suposición que ahora se acepta como legítima, pero que no fue totalmente aceptada cuando los London la hicieron, y es que la mera eliminación de la derivada respecto al tiempo en esta última ecuación [4] resulta en una relación físicamente válida y conocida como la segunda ecuación de London:

$$\mathbf{B} = -\frac{mc}{n_s e^2} (\nabla \times \mathbf{J}_s) \quad [5]$$

Sustituyendo la ecuación de Maxwell [2] en la segunda ecuación de London, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) &= -\mathbf{B} \\ &= \lambda_L^2 ((\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) \\ &= \lambda_L^2 (-\nabla^2 \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \end{aligned} \quad [6]$$

La constante multiplicativa es definida como el cuadrado de la profundidad de penetración de London λ_L y representa la longitud sobre la cual la densidad de supercorriente experimenta una disminución exponencial.

Definiendo x como el eje perpendicular a la superficie del conductor, si un campo $\mathbf{B}(x)=\mathbf{B}(0)$ es aplicado paralelo a la superficie de el conductor, $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(0)e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$ es una solución para $\mathbf{B}(x)$ según [6].

Una expresión similar para la densidad de corriente $\mathbf{J}_s(x) = \mathbf{J}_s(0)e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$ puede ser fácilmente formulada sustituyendo la ecuación de Maxwell [2] en la segunda ecuación de London [5]:

$$\begin{aligned} \frac{-mc^2}{4\pi se^2}(\nabla \times \nabla \times \mathbf{J}_s) &= \mathbf{J}_s \\ &= \lambda_L^2(-\nabla^2 \mathbf{J}_s) = \mathbf{J}_s \end{aligned}$$

Es evidente que el campo magnético penetra de manera exponencial desde la superficie hacia dentro del superconductor una longitud λ_L . Consecuentemente, la densidad de corriente experimenta una disminución exponencial.

La teoría de London explica el efecto Meissner ya que $\lambda_L^2(-\nabla^2 \mathbf{B}) = -\mathbf{B}$ no tiene solución uniforme en el espacio, implicando que un campo magnético uniforme no puede existir dentro de un superconductor. $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 = cte$ es una solución únicamente para $\mathbf{B}_0 = 0$, ya que siempre es $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$. Este resultado indica que el flujo magnético es totalmente expulsado del interior del superconductor.

Existe un método intuitivo para la reformulación de las ecuaciones de London en términos del vector potencial \mathbf{A} . Comenzando con el momento canónico

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + \frac{e\mathbf{A}}{c}$$

el cual tiene un valor de cero en el ground state, la velocidad media

$$\langle \mathbf{v}_s \rangle = \frac{-e\mathbf{A}}{mc}$$

de las partículas superconductoras pueden ser derivadas en términos del potencial.

Si sustituyo en la ecuación de la densidad de supercorriente, $\mathbf{J}_s = -en_s\mathbf{v}_s$, nos queda

$$\mathbf{J}_s = \frac{-n_se^2\mathbf{A}}{mc}$$

que es una expresión de la densidad en términos del potencial.

Para obtener una idea del orden de magnitud de la profundidad de penetración de London, se sugiere el caso de $T=0K$, ya que la densidad de supercorriente es conocida $n_s=n$. Para el cero absoluto, la profundidad de penetración es del orden de $100-1000\text{\AA}$. La electrodinámica no local explica la discrepancia entre esta estimación y los resultados experimentales actuales, los cuales tienden a ofrecer valores de penetración mas elevados.

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0) = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}} \approx 100 - 1000\text{\AA}$$

Desde el régimen de la electrodinámica clásica, la teoría de Ginzburg-Landau respalda solidamente la teoría de London. Capaz de considerar variaciones no lineales y espaciales en la densidad de supercorriente, la teoría de Ginzburg-Landau es sin duda más complicada que la teoría de London. En general, propone una teoría fenomenológica de superconductividad. Introduce una función compleja de pseudo-onda relacionada hipotéticamente con la densidad local de electrones de superconductividad $n_s = |\psi(\mathbf{r})|^2$.

En ^[Lynn] se describe la teoría de Ginzburg-Landau como:

Una teoría de superconductividad la cual da una extraordinariamente completa informe de los hechos experimentales partiendo de los siguientes postulados simples:

- El superconductor es caracterizado por

(i) Un parámetro de orden complejo

$$\psi(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$$

(ii) un vector potencial

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- La densidad de energía libre $f(\mathbf{r})$ se asume que es una función regular de ψ de tal manera que minimiza $F = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r})$.

A través de una derivación que invoca el modelo de los dos fluidos para determinar y manipular la densidad de energía libre en términos del parámetro de orden complejo y del campo magnético, la teoría de Ginzburg-Landau llega a:

$$f = \frac{1}{2m^*} [\hbar^2 (\nabla |\psi|)^2 + (\hbar \nabla \varphi - \frac{e^*}{c} \mathbf{A})^2 |\psi|^2]$$

El segundo termino es similar a la energía cinética y es dependiente de la supercorriente. Debido a que φ es constante este termino queda:

$$\frac{e^{*2} \mathbf{A}^2}{2m^* c^2} |\psi|^2$$

Teniendo en cuenta que la densidad de energía de un superconductor es

$$\frac{A^2}{8\pi\lambda_{eff}^2}$$

donde λ_{eff} es la profundidad de penetración efectiva. La teoría de Ginzburg-Landau nos da una expresión para λ_{eff} mediante la equiparación de la densidad de energía con la energía cinética en la ecuación de la energía libre, donde m^* es la masa efectiva y e^* es la carga efectiva de un electrón.

$$\lambda_{eff} = \sqrt{\frac{m^* c^2}{4\pi |\psi|^2 e^{*2}}}$$

Esta expresión para la profundidad de penetración es equivalente a la que se derivó de la teoría de London, así se demuestra como la teoría de Ginzburg-Landau refuerza la teoría de London.

Concluyendo este capítulo, se podría resumir que la teoría de London juega un papel vital en la explicación de la distinción entre los superconductores y los conductores normales. Utilizando el modelo de los dos fluidos y las ecuaciones de Maxwell, se obtienen las ecuaciones de London

$$\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{mc}{n_s e^2} (\nabla \times \mathbf{J}_s)$$

Que describen el campo magnético y la densidad de supercorriente en un superconductor.

Esto lleva a la expresión $\lambda_L^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}$, la cual solo tiene una solución constante $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_o = 0$. Por lo tanto, el flujo magnético es totalmente expulsado del interior del cuerpo superconductor así la teoría de London explica el efecto observado experimentalmente y denominado Meissner-Ochsenfeld.

1.4. Cuantización del flujo

La teoría básica del comportamiento de un superconductor respecto un campo magnético externo fue descrita por el físico ruso Alexei A. Abrikosov en los años cincuenta del siglo XX, en base a los trabajos de Ginzburg y Landau.

Distinguía dos categorías de superconductores, designadas por tipo I y tipo II.

Sometidos a un campo magnético muy débil, estas dos clases de materiales actúan de forma muy parecida ya que ambos expulsan completamente el campo. Las diferencias surgen cuando se intensifica el campo.

En los materiales de tipo I, que en su mayor parte son materiales puros, la corriente de blindaje que en la superficie presentan los superconductores y que evita que penetre el campo magnético exterior, se colapsa cuando la intensidad del campo exterior alcanza un valor crítico bien definido y el flujo magnético entra súbitamente en el material.

Los materiales de tipo II muestran su superconductividad a través de un proceso más gradual. El flujo magnético empieza a penetrar desde una intensidad de campo baja (el campo crítico más bajo), pero no se elimina la última traza de superconductividad hasta que se aplica un campo más intenso (el campo crítico superior).

La penetración del flujo magnético en un superconductor del tipo II depende crucialmente de una limitación de la mecánica cuántica: la existencia de un cuanto de flujo magnético. Por lo tanto, el campo en el interior de un superconductor del tipo II no puede crecer continuamente, sino que debe aumentar por pasos, con un cuanto de flujo cada vez. Abrikosov sugirió que cada cuanto de flujo, al que llamo fluxoide, pasa a

través del material dentro de un canal microscópico de metal resistivo normal. Cada canal está rodeado por un pequeño torbellino de sobrecorriente, que actúa protegiendo el material superconductor próximo respecto del campo interno del cuanto de flujo. La función de la corriente en el torbellino ó vórtice es análoga a la de la corriente de blindaje superficial a intensidades de campo más bajas

Una sección transversal de tal tipo de torbellino revelaría una región estrecha del núcleo del mismo donde el campo magnético alcanza su valor máximo y otra región donde la densidad de los pares de electrones superconductores es mínima (ver teoría BCS). Un observador que se desplazara hacia el exterior desde el núcleo comprobaría que la densidad de los electrones apareados aumentaba y se aproximaba a la densidad de equilibrio característica del material compacto a una distancia de una longitud de coherencia. A la inversa, el campo magnético disminuiría con la distancia referida al núcleo, y llegaría a anularse a la distancia de una profundidad de penetración de valor unidad.

El tipo I o el tipo II de un superconductor dado viene determinado por los valores relativos de la longitud de coherencia y de la profundidad de penetración. En los metales puros y en otros materiales pertenecientes al tipo I, la longitud de coherencia es mayor que la profundidad de penetración; no se forman torbellinos. El costo energético invertido en la creación de un torbellino es mayor que el gastado en eliminar completamente el estado de superconducción. En los materiales del tipo II, la longitud de coherencia es menor que la profundidad de penetración. Por tanto, sale energéticamente favorecida la formación de torbellinos. A medida que aumenta el campo magnético aplicado a un superconductor del tipo II, va creciendo el número de cuantos de flujo enfilados a través del material. Entre los canales del torbellino quedan

regiones del metal superconductor; de este modo persiste la superconductividad en el material compacto. Mientras se mantenga un único filete continuo de superconductor, la resistencia medida en la muestra debe ser igual a cero. El superconductor del tipo II sólo se extingue cuando los torbellinos están agrupados tan estrechamente que no puede existir ese paso continuo; tal ocurre cuando se alcanza al campo crítico superior.

La teoría microscópica estándar de la superconductividad es conocida como teoría BCS, llamada así en honor a K. Bardeen, L. Cooper y J.R. Schrieffer, que la propusieron en 1957 (y por la cual les fue concedido el premio Nobel en 1972). La misma explica perfectamente las propiedades de los materiales superconductores de muy baja temperatura crítica (superconductores por debajo de 23 K, llamados clásicos o convencionales).

Bardeen, Cooper y Schrieffer desarrollaron una teoría para explicar la superconductividad de manera cuántica, conocida en su honor como teoría BCS. Esta teoría parte de la existencia de los "Pares de Cooper", como una pareja de electrones con momento y spin opuestos unidos por una fuerza de tipo atractivo producida por la interacción con la red de iones positivos en la cual ellos se mueven. Así la superconductividad aparece como consecuencia de la existencia de los pares de Cooper mediados por la interacción electrón-fonón. Así mismo la teoría BCS permite determinar la distancia promedio a la cual se encuentran los dos electrones que forman el par de Cooper, conocida como longitud de coherencia, concepto que había sido introducido por los teóricos rusos Ginzburg y Landau en 1950 en una descripción fenomenológica de la superconductividad. Los parámetros longitud de penetración y longitud de coherencia son fundamentales en la superconductividad y aparecen en forma natural en el marco de la teoría BCS.

De manera general los parámetros de la teoría BCS los siguientes:

- Interacción electrón-fonón-electrón.
- Pares de Cooper
- Longitud de coherencia
- Corrientes persistentes

Hemos visto el concepto de longitud de coherencia, que equivale a la extensión de la función de onda de los pares de Cooper a distancias muy grandes. Al hablar del flujo de una corriente superconductora hay que considerar otro tipo de coherencia adicional y distinto, la coherencia de fase, que es una consecuencia del hecho de que los pares de electrones no pueden ser dispersados. La función de onda de electrón libre en un metal es igual a:

$$\psi = e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

donde la fase de la onda es $\vec{k} \cdot \vec{r}$

Cada vez que un electrón es dispersado, el vector de onda \mathbf{k} cambia y esto da lugar a que cuando un electrón libre se mueve a través de un metal, su \mathbf{k} experimenta muchos cambios, de manera que su función de onda experimentará muchos cambios de fase aleatorios. Esto implica que, en un metal normal, el conocimiento de la función de onda en un punto no nos permite predecir la fase en otro punto.

Esto es distinto en el caso de un superconductor. La función de onda irá ahora asociada a un par de electrones, y el \mathbf{k} de la función de ondas será el \mathbf{k} efectivo combinado de los dos electrones. Para los pares de electrones superconductores no existe dispersión, es decir, su \mathbf{k} efectivo no cambia. Por eso, la diferencia de fase entre dos posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 será $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, cualquiera que será la distancia $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Esto es lo

que se entiende por coherencia de fase. Una consecuencia de la coherencia de fase es la cuantización del flujo.

Consideremos un anillo superconductor de radio R con una determinada cantidad de flujo magnético, Φ , en su interior

El flujo magnético Φ está causado por corrientes persistentes en la superficie interna del anillo. En cualquier punto de la circunferencia interior ha de haber coherencia de fase, es decir:

$$\oint_R \vec{k} \cdot d\vec{l} = 2\pi n$$

$n =$ entero

Buscamos una relación entre \vec{k} , la densidad de corriente superconductora \vec{j}_s y el flujo Φ . La cantidad de movimiento de un electrón libre es:

$$\hbar \vec{k} = m \vec{v}$$

En presencia de un campo magnético:

$$\hbar \vec{k} = m \vec{v} - e \vec{A}$$

Para un par electrónico la cantidad de movimiento es igual a:

$$\hbar \vec{k} = 2m \vec{v} - 2e \vec{A}$$

y la densidad de corriente superconductora

$$\vec{j}_s = n_s e \vec{v}$$

(con n_s : densidad de electrones apareados). Despejando llegamos a que el vector de onda del par de Cooper es:

$$\vec{k} = \frac{2m \vec{j}_s}{\hbar n_s e} - \frac{2e}{\hbar} \vec{A}$$

Integrando alrededor de circunferencia de radio R ,

$$\oint_R \bar{k} \cdot d\bar{l} = \frac{2m}{n_s e \hbar} \oint_R \bar{j}_s \cdot d\bar{l} - \frac{2e}{\hbar} \oint_R \bar{A} \cdot d\bar{l} = 2\pi n$$

Aplicando el teorema de Stokes y sabiendo que $B = \text{rot } A$:

$$\frac{2m}{n_s e \hbar} \oint_R \bar{j}_s \cdot d\bar{l} - \frac{2e}{\hbar} \int \bar{B} \cdot d\bar{S} = 2\pi n$$

$$\Phi_{ext} = \int \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

Por otra parte, utilizando la ecuación de London sabemos que

$$\oint_R \bar{j}_s \cdot d\bar{l} = \int (\nabla \times \bar{j}_s) d\bar{S} = -\frac{n_s e^2}{m} \int \bar{B}_{int} \cdot d\bar{S}$$

$$\frac{2e}{\hbar} (-\Phi_{int} - \Phi_{ext}) = 2\pi n$$

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{ext} = n \frac{2\pi \hbar}{2e} = n\Phi_0$$

y el flujo de un anillo superconductor está cuantizado en unidades de

$$\Phi_0 = \frac{2\pi \hbar}{2e}$$

Esta unidad de flujo se denomina fluxoide ($\Phi_0 \cong 2,07 \times 10^{-15}$ Tesla m²). En general Φ_{ext} no está cuantizado variando Φ_{int} de tal forma que el flujo total esté cuantizado y dado que $\Phi_{int} \ll \Phi_{ext}$ debido a que $\lambda_L \ll R$

$$\Phi_{ext} \approx n \frac{2\pi \hbar}{2e} = n\Phi_0$$

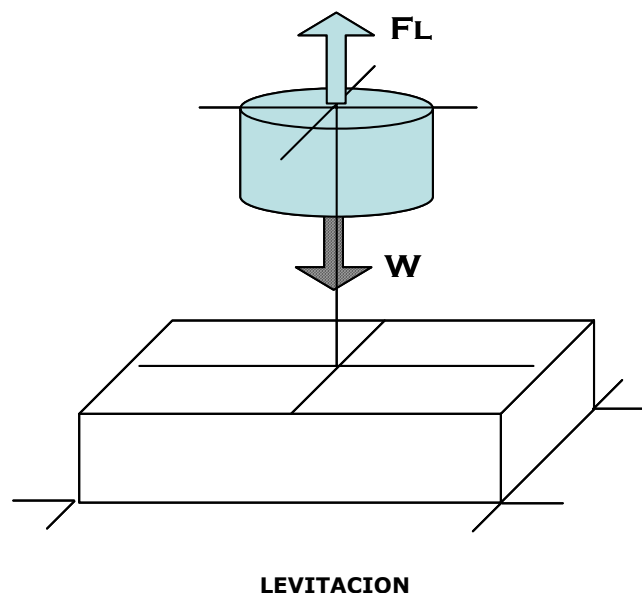
Por lo que resulta que un anillo superconductor en el seno de un campo cuantiza el flujo que pasa a través de él, esto es, solo puede tomar valores discretos de una cantidad.

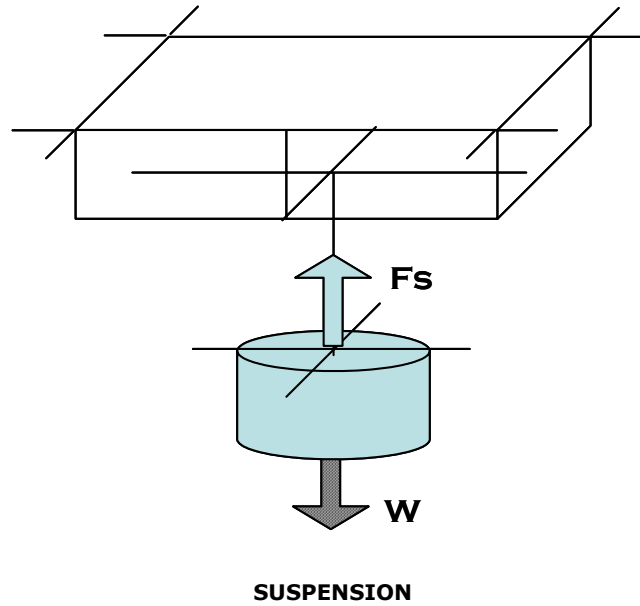
2. LEVITACION

2.1. Estado del arte

Una de las aplicaciones prácticas de la superconductividad que surge de manera más inmediata, es el aprovechamiento de la propiedad del “apoyo sin contacto” o levitación.

Se dice que un cuerpo levita cuando se mantiene en flotación sin ningún soporte material aparente. En este caso, la fuerza contra-gravitatoria es una fuerza repulsiva a distancia entre dos cuerpos, por lo que para conseguir que uno de los cuerpos levite, se ha de colocar encima del otro cuerpo y así compensar la fuerza gravitatoria. Existe otro efecto similar denominado suspensión, en el que la fuerza es de atracción. En este fenómeno el cuerpo que va a ser suspendido se ha de colocar por debajo del otro cuerpo con el fin de poder compensar el peso con esta fuerza a distancia.





En este apartado trataremos el caso de la levitación, existiendo distintas técnicas para conseguirla:

- Aerodinámica
- Electrostática
- Óptica
- Acústica
- Magnética

2.1.1. Levitación Aerodinámica

La levitación aerodinámica consiste en la utilización de la presión de un gas sobre materiales para contrarrestar la fuerza gravitatoria de modo que aquellos se mantengan estables sin necesidad de contacto físico con ninguna parte del contenedor que los aloja.

El término levitación aerodinámica se podría aplicar a los helicópteros, overcrafts y cojinetes neumáticos, sin embargo, recientemente este término se ha asociado con una técnica que emplea una tobera con forma de cono y que permite la

levitación estable de muestras esféricas de 1 a 3 mm de diámetro sin la necesidad de mecanismos de control activo.

2.1.2. Levitación Electrostática

La levitación electrostática es el proceso de utilizar un campo eléctrico para sustentar un objeto cargado eléctricamente y que contrarreste los efectos de la gravedad. Esta técnica fue utilizada por ejemplo en el experimento de la gota de aceite de Robert Millikan y es empleada para suspender los giróscopos de la sonda Gravity B durante el lanzamiento.

Según el teorema de Earnshaw, ninguna disposición estática de campos electrostáticos se puede emplear para estabilizar un objeto que levita. Existe un punto donde los dos campos se cancelan pero es inestable. Sin embargo es posible utilizar campos eléctricos cambiantes dinámicamente para mantener un objeto en posición.

2.1.3. Levitación Óptica

Levitación óptica es un método desarrollado por Arthur Ashkin mediante el cual un material levita contra la fuerza de la gravedad por medio de una fuerza en sentido contrario procedente de una transferencia de momentos fotónicos. Típicamente la presión de la radiación fotónica procedente de un rayo láser vertical convenientemente dirigido y enfocado permite contrarrestar la fuerza gravitatoria para permitir mantener pequeñas partículas en suspensión. En este tipo de experimentos se emplean esferas dieléctricas transparentes de tamaño del orden de las micras (hasta 50 μm) generalmente de agua o aceite. La radiación del láser necesita ser sintonizable empleando láseres de

argón. La potencia requerida del láser es del orden de 1 watt enfocado a puntos de tamaño unas decenas de micras.

2.1.4. Levitación Acústica

Levitación acústica es un método empleado para la suspensión de sustancias en un fluido mediante el empleo de la presión de la radiación acústica procedente de ondas de sonido intensas. Algunos métodos pueden hacer levitar objetos sin crear sonido audible para el oído humano.

La levitación acústica es empleada generalmente en procesos en los que se requieran materiales de pureza muy elevada o reacciones químicas muy rigurosas para realizarse dentro de contenedores que puedan contaminar.

Este método es mas difícil de controlar que otros para las mismas aplicaciones como la levitación electromagnética pero tiene la ventaja de ser capaz de hacer levitar materiales no conductores.

Actualmente la máxima capacidad de levitar con este método es de unos pocos kilogramos. Los levitadores acústicos son empleados mayoritariamente en la industria como se ha dicho y en las investigaciones de la NASA donde se requiere efecto antigravitatorio.

Un levitador acústica básicamente tiene dos partes principales, un transductor y un reflector. Estos generalmente tienen forma cóncava en sus superficies para ayudar a enfocar el sonido. Una onda de sonido viaja desde el transductor y rebota en el reflector. Tres propiedades básicas de esta onda que va y vuelve tras rebotar ayudan a suspender objetos en el aire.

1.- la onda como todo el sonido es una onda de presión longitudinal. En una onda longitudinal, el movimiento de los puntos dentro de la onda es paralelo a la dirección en la que viaja la onda. Es decir, en el movimiento ondulatorio longitudinal coinciden la dirección de vibración y de propagación, a diferencia de lo que ocurre con el movimiento ondulatorio transversal donde la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de vibración, tal como sucede en una cuerda, o las ondas electromagnéticas.

2.- la onda puede rebotar en las superficies y sigue la ley de reflexión, la cual establece que el ángulo de incidencia (ángulo con el cual choca contra la superficie) es igual al ángulo de reflexión (ángulo con el cual sale de la superficie).

3.- cuando una onda de sonido se refleja en una superficie, la interacción entre sus compresiones y rarefacciones generan interferencias. Las compresiones que se encuentran con otras compresiones se amplifican y las compresiones que se encuentran con rarefacciones se compensan. A veces, la reflexión y la interferencia se combinan para crear una onda estacionaria. Las ondas estacionarias vibran pero no viajan o dicho de otra manera, las ondas estacionarias no son ondas de propagación sino los distintos modos de vibración.

Las ondas estacionarias de sonido definen nodos o áreas de mínima presión y antinodos o áreas de máxima presión. Los nodos de una onda estacionaria están en el corazón de la levitación acústica.

Situando un reflector a una distancia concreta del transductor, el levitador acústico crea una onda estacionaria. Cuando la orientación de la onda es paralela al tirón de la gravedad, partes de la onda estacionaria tienen una presión constante hacia abajo y

otras partes tienen una presión constante hacia arriba. Los nodos tienen muy poca presión.

Si estuviésemos en el espacio donde la gravedad es pequeña, las partículas se recogerían flotando en los nodos de la onda estacionaria. En la tierra, los objetos se recogen por debajo de los nodos, donde la presión de la radiación acústica o la cantidad de presión que una onda de presión puede ejercer sobre una superficie, compensa el tirón de la gravedad.

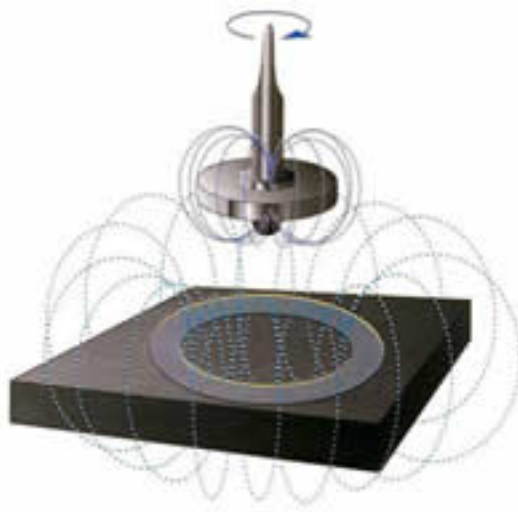
2.1.5. Levitación Magnética

Las fuerzas de origen magnético se transmiten sin soporte material y por lo tanto, cuando trabajan en contra de la gravedad pueden originar levitación de objetos. Este “apoyo sin contacto”, se puede conseguir por medio de la utilización de parejas de imanes y aprovechando la repulsión que ofrecen los polos del mismo signo cuando están enfrentados. Entre dos campos magnéticos, estas fuerzas pueden ser de repulsión o de atracción, dependiendo de los polos que se enfrenten.

La levitación magnética de objetos ha sido generalmente lograda mediante la combinación de materiales diamagnéticos y campos extremadamente fuertes procedentes de un imán. Los campos fuertes pueden no ser esenciales pero la característica de diamagnetismo se requiere para la levitación magnética sin contacto. O dicho de otra manera, la levitación utilizando materiales paramagnéticos y o ferromagnéticos ha sido considerado empíricamente imposible. Además esta regla empírica es soportada teóricamente por el teorema de Earnshaw, el cual establece que ningún objeto estacionario hecho de material magnético, en una configuración fija,

puede ser mantenido estable y libre de contacto dentro de fuerzas magnéticas estáticas 3D y/o fuerzas gravitacionales.

Es conocido que existen unos cuantos modos para levitar magnéticamente objetos. Por ejemplo Roy Harrigan, patentó en 1983 un objeto conocido con el nombre de Levitron en el que un imán girando como si fuese una peonza se mantiene en equilibrio estable levitando sobre otro imán.



Otras configuraciones permiten levitar bolas de acero sin control activo pero con la ayuda de otras bolas de acero magnetizadas interpuestas.

Pero de manera general para el caso de la atracción entre un imán permanente y una pieza de hierro, o la atracción entre un electroimán y un trozo de hierro, es preciso que para levitar de manera estable, se pueda por ejemplo controlar de manera activa la corriente suministrada al electroimán para así mantener la distancia entre ellos monitorizando cuidadosamente la distancia con sensores.

Es decir estos sistemas magnéticos, también denominados puros, precisan de un sistema de control complejo, que aporte estabilidad a la separación entre los imanes.

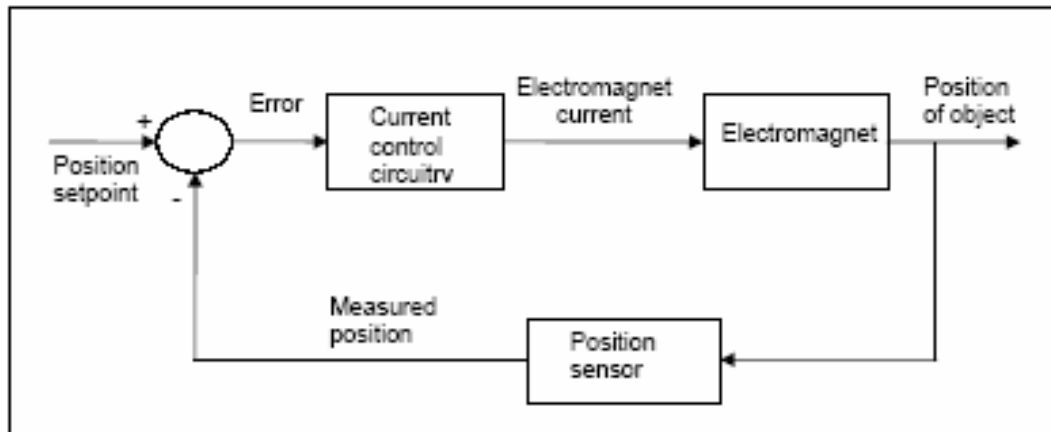


DIAGRAMA DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA SISTEMA DE SUSPENSION MAGNETICA

La solución que no precisa de esta complejidad añadida y que será tratada en este trabajo, son las denominadas híbridas, en las que se combina un imán permanente con un superconductor, siendo la clave de la ventaja de este tipo de combinación, la capacidad de soportar cargas elevadas aportada por el imán permanente enfrenteado a un material diamagnético (superconductor) y la estabilidad aportada por el anclaje del flujo magnético en el elemento superconductor.

2.2. Levitación superconductora

Ya en el siglo XIX, Samuel Earnshaw demostró que en los campos en los que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias, la posición relativa de ambos elementos es intrínsecamente inestable.

Estabilizar un cuerpo significa dominar los seis grados de libertad definidos por la posición del c.d.g. y los tres ángulos de Euler y eso no se puede conseguir con la interacción en las condiciones de Earnshaw. Existe, sin embargo, la posibilidad de limitar temporalmente un grado de libertad mediante la conservación del momento cinético como ocurre en un giróscopo. Este último método es utilizado por el magnetrón, dispositivo que muestra la posibilidad de levitación con solo imanes.

En 1939, Braunbeck llegó a la conclusión de que cuando la permeabilidad magnética μ de un sistema magnético sea menor que la del vacío, puede haber estabilidad. Este es el caso de los superconductores que no permiten que penetre el campo en su interior (diamagnetismo perfecto) o que no permiten que varíe una vez ha penetrado y ha sido atrapado por los puntos de anclaje. En este último caso, la estabilidad está garantizada porque la magnetización se adecua para conseguirla. Si enfrentamos un superconductor y un imán, el comportamiento dependerá del tipo de superconductor de que se trate.

En un superconductor Tipo I las fuerzas serán siempre repulsivas debido al efecto Meissner, mientras que en un superconductor Tipo II, el sentido de la fuerza depende del sentido del desplazamiento a partir de una posición de equilibrio.

El fenómeno por el cual las líneas de flujo magnético se quedan ancladas en el material superconductor, no puede ocurrir en los superconductores tipo I ya que estos no pueden ser penetrados por campos magnéticos (efecto Meissner-Ochsenfeld) siendo el anclaje únicamente posible, en los superconductores tipo II y localizándose según estudios, en los defectos en la estructura cristalina del superconductor, por lo general límites de grano o impurezas.

El anclaje del flujo es un efecto deseable, con el fin de evitar el arrastre del flujo, el cual puede crear una pseudo resistencia y disminuir tanto la densidad de corriente crítica, como el campo crítico.

Uno de los usos en la industria que permite aprovechar la propiedad del apoyo sin contacto, es el cojinete.

En 1953 hubo un primer intento de aprovechar la fuerza repulsiva ^[Arkadiev] por el efecto Meissner, en aplicaciones mecánicas tales como cojinetes superconductores ^[Simon] y en 1958 se construyó un motor que empleaba cojinetes que se basaban en la superconductividad ^[Buchhold] ^[Schoch]. Tras el descubrimiento de los superconductores de temperatura crítica elevada (HTSC) ^[Bednorz, Muller] el efecto Meissner con su fuerza repulsiva ha sido utilizado como una demostración muy popular de las propiedades de la superconducción ^[Early].

Un cojinete sin fricción es el sueño de todo diseñador mecánico, y un cojinete donde las dos superficies nunca hacen contacto está cerca de ese ideal. Los cojinetes magnéticos logran la separación mecánica, y cuando se minimizan otros factores disipativos, ellos pueden ser cojinetes muy buenos, permitiendo velocidades rotatorias no logradas de ninguna otra manera.

Se usan los cojinetes magnéticos en un número creciente de aplicaciones. Comparado con los cojinetes hidrodinámicos o de bolas, sus ventajas principales son el no contacto de las superficies, la baja dispersión de potencia, y el potencial para lograr las velocidades de superficie significativamente altas. Por la estabilidad, los cojinetes magnéticos convencionales necesitan el apoyo mecánico en por lo menos una dimensión o, más comúnmente, la retroalimentación activa en el circuito electromagnético. El uso de componentes superconductores ofrece el potencial para eliminar los sistemas de control y más allá reduce la dispersión de potencia del sistema.

En este tipo de elementos, se identifican dos partes, para los cojinetes magnéticos superconductores híbridos pasivos, (CSHP) que serán el objeto de este trabajo, como son, el rotor (bujes) o imán y el estator (casquillo) o superconductor.

Este tipo de cojinetes superconductores híbridos pasivos, (CSHP) poseen como ya hemos dicho, una gran capacidad de carga y una estabilidad posicional intrínseca que le da el efecto Meissner y el efecto de anclaje de flujo (flux pinning).

Existen estudios ^[McMichael] en los cuales se miden y comparan sobre un prototipo de cojinete no magnético (cojinete mecánico), las fuerzas radiales y axiales en combinaciones imán/superconductor (híbridos) e imán/imán (puros), llegándose a obtener con los sistemas imán/superconductor, capacidades de sustentación mayores de 41N/cm² a 77K (superconductores YBCO) y sin las inestabilidades de las configuraciones magnéticas puras.

Los trabajos publicados sobre este tema, ^[Je-Hwan Yon] comienzan buscando las relaciones entre los parámetros físicos y la fuerza de levitación, para ello se parte de configuraciones físicas simples, calculándose las fuerzas de levitación actuando sobre

un imán de simetría cilíndrica, cuando éste está situado sobre un plano superconductor infinito.

Teniendo en cuenta que las dimensiones físicas de cualquier superconductor real son siempre finitas, una extensión natural a estos cálculos es la realizada al considerar el efecto del tamaño finito del superconductor sobre las fuerzas de levitación. En otros trabajos [Zeisberger] con el mismo objetivo, se calcula la dependencia entre el grosor y la fuerza de levitación, basándose como los anteriores, también en la teoría de London.

Concretamente en uno de ellos [Yang] (2), de manera analítica, se estudia un sistema que consiste de, una línea de dipolos magnéticos infinitamente larga que simula el imán permanente, situada de manera simétrica por encima de una tira superconductora infinitamente larga. Aplicando el efecto Meissner en los superconductores, obtenemos expresiones analíticas de las fuerzas de levitación actuando sobre la línea de dipolos. Como ejemplo de aplicación, el modelo estima el valor de la frecuencia de vibración vertical de un cojinete superconductor CSHP.

Para el cálculo de las fuerzas de levitación, se trabaja con disposiciones plana-paralela del sistema superconductor/imán y haciendo la consideración de que una de las dimensiones geométricas del sistema plano es infinita. Para llegar a esta configuración, los trabajos [Yang] (3) realizan una aproximación sistemática, comenzando con geometrías extremadamente idealizadas y expresiones muy simples para el cálculo de la fuerza de levitación, yendo paso a paso hacia un escenario más realista, mediante la aplicación de correcciones a las ecuaciones. En particular se investigan configuraciones magnéticas con un elevado gradiente de campo, el cual permite una mayor rigidez al sistema y finalmente se presentan cálculos numéricos, los cuales muestran la dependencia de la fuerza de levitación, con el tamaño y la densidad de corriente del superconductor.

Llegando a un punto en los estudios, donde se trabaja sobre la medida tridimensional de la fuerza de levitación ^{[Yang] (3)} y de la distribución del campo magnético.

De todo lo anterior se comprende, que la aplicación de cojinetes levitantes es tanto más atractiva, cuanto más crítica es la conservación de la energía en el sistema donde se coloca. El ejemplo típico y más estudiado y en el cual, en principio, encajaría el uso de cojinetes magnéticos superconductores, es el sistema de almacenamiento de energía por rotación (flywheel energy storage system FWESS). Estos sistemas, almacenan energía en forma de rotación de una masa y entregan energía eléctrica cuando se precisa, pudiendo encontrar velocidades de rotación, del orden de las 20.000 a 50.000 rpm ^[Kangwon Lee]. Teniendo en cuenta que en los cojinetes mecánicos convencionales, la fricción es directamente proporcional a la velocidad, la utilización de éstos reduciría en gran medida el rendimiento y la eficiencia de los sistemas de almacenamiento, resultando obvia la necesidad de reemplazar los clásicos cojinetes mecánicos.

Existen dos posibilidades ya expuestas para los cojinetes levitantes, los cojinetes magnéticos en configuraciones puras (imán/imán) o las híbridas (CSHP). En los primeros como ya se expuso, existe la necesidad de implementar un sistema complejo de estabilización, mientras que en los segundos, habrá que tener en cuenta, la refrigeración necesaria para disponer de superconductividad.

Con relación a esta última necesidad, históricamente ha sido uno de los mayores impedimentos para la aplicación comercial de la superconductividad, la necesidad de refrigeración, precisando para que esta tecnología de superconducción se pueda aplicar masivamente, de un sistema fiable que permita disminuir la temperatura al límite necesario. Actualmente existen dos sistemas el Gifford-McMahon (GM) y el criorefrigerador pulse-tube. Ambos son fiables y con muchas horas de operación sin

necesidad de mantenimiento, además este último, presenta la ventaja de no tener partes móviles, con la consiguiente eliminación de vibraciones. Por lo tanto, los requerimientos de refrigeración no son tan críticos.

Solventadas todas estas cuestiones, se esperaba por lo tanto, que la aplicación de estos cojinetes magnéticos superconductores fuese inmediata en este tipo de sistemas acumuladores de energía, ya que al suponer que no existía fricción, ya que no existía contacto, no se originaría la degradación de la velocidad de rotación y por lo tanto no sufriría una disminución en la capacidad de almacenamiento. Sin embargo se encontró, que la fricción electromagnética de los cojinetes no era cero, debido a las fuerzas electromagnéticas. De manera más concreta, la degradación de la velocidad de rotación según estudios ^[Shiraishi], se vio que se debía a:

1. La interacción entre las fuerzas magnéticas del campo magnético no homogéneo del imán permanente del rotor y las corrientes de Foucault inducidas en el cryostato.
2. La fuerza magnética entre el campo magnético no homogéneo del imán permanente del rotor y la shielding current inducida en el superconductor.
3. La fuerza magnética entre el campo magnético de los superconductores que producen la fuerza de levitación y la corriente de Foucault inducida en el imán permanente del rotor. Este campo magnético de superconductor es también no homogéneo, ya que, los superconductores están formados por bloques de HTSC (superconductor de alta temperatura o superconductor tipo II).

Para estudiar todos estos aspectos, existen investigaciones ^[Demachi] que de manera numérica y experimental, realizan análisis de la degradación de la velocidad de rotación en los cojinetes magnéticos superconductores

En esta investigación se encuentra, que el tercer fenómeno es el más significativo y para disminuirlo se construyó un avanzado rotor de imán permanente, el cual incluía láminas delgadas aislantes en capas, para suprimir sus corrientes de Foucault y así evitar la degradación de la velocidad de rotación. Utilizando estos cojinetes con rotores de imán permanente modificados con los insertos de láminas, se midió la degradación de la velocidad de rotación y la fricción electromagnética y se comparó con otros con rotores sin láminas, apreciándose la mejoría.

Por lo tanto, los cojinetes superconductores tienen la ventaja de que la resistencia rotacional entre el rotor y el estator, es muchísimo más reducida si se compara con los cojinetes habituales, pero aun así, la degradación de la fuerza de levitación y de la velocidad de rotación, como se ha podido ver, es uno de los problemas más significativos para la aplicación práctica de los cojinetes superconductores en los sistemas de almacenamiento de energía cinética de rotación (FWESS).

Con relación a este problema, hay otros muchos estudios que realizan el análisis de la pérdida de rotación ^[Shiraishi]. Consideran que la pérdida de rotación, es causada porque la no homogeneidad del campo magnético del imán permanente que hace funciones de rotor y actúa como un campo de corriente alterna sobre el superconductor, originando una degradación en la velocidad de rotación. Exponiendo un método mejorado, que permite simular las pérdidas de rotación, de manera que las corrientes de Foucault fluyendo dentro del criostato alrededor del superconductor han sido tenidas en cuenta. También analiza la dependencia de las pérdidas de rotación, con la altitud de la levitación, la velocidad de rotación inicial y la amplitud de los componentes no homogéneos del campo del imán permanente del rotor.

De la misma manera otros estudios ^[Demachi] ahondan en la forma de disminuir la resistencia a la rotación, por el gran par resistente que se presenta, achacándolo a la no simetría axial del flujo magnético del rotor imán permanente y a las pérdidas por corrientes de Foucault en el estator. Llegando estudios a establecer un principio por el cual, una fuerza (o par) resistente aparece solamente como respuesta a aquellos movimientos del imán permanente que cambian el campo magnético sobre el superconductor o dicho de otra manera y estableciendo como corolario; ningún par resistente aparece cuando un imán permanente con simetría alrededor de un eje, en levitación sobre un superconductor gira alrededor de ese eje, siendo éste, exponen, el concepto guía en el diseño de cojinetes de levitación magnética superconductora

Fuera del tamaño reducido de los prototipos utilizados en los laboratorios de los sistemas de almacenamiento de energía cinética de rotación, se precisa conocer las diferencias inherentes, cuando estos sistemas tienen tamaños propios de aplicaciones industriales con capacidades del orden de los MWh, en los cuales y como es obvio, se precisan cojinetes magnéticos superconductores de escala ultra grande para absorber las cargas.

Existen estudios ^[Nagaya] que recogen las soluciones del diseño de estos cojinetes por cuestión de tamaño y la influencia del desplazamiento de posición en dirección radial entre el estator y el rotor sobre parámetros como la levitación magnética y la rotación. De manera práctica, el bloque del superconductor lo diseñaron segmentando su estructura, mientras que las uniones de los polos N-S del imán permanente en forma de anillo del rotor, se dispusieron de manera alternada según la dirección radial. Encontrando que, cuando la posición desplazada del bloque superconductor coincidía con la unión de los polos N-S de los imanes permanente, tanto la levitación magnética

como las características de rotación fueron iguales al caso de que el conductor no estuviese segmentado. Cuando la posición era el centro de un polo lateral de los imanes permanentes, la levitación era la misma, que en el caso de que el bloque superconductor no estuviese desplazado, pero el comportamiento de las características de rotación cambió y la pérdida aumentó, cuando se comparó con el caso de no desplazamiento.

Según otros trabajos [Kangwon Lee], aún quedan consideraciones pendientes por resolver para la utilización de los CSHP en los FWESS y son la baja rigidez y amortiguamiento de los CSHP.

Como se puede observar de manera práctica, si el rotor intenta desviarse del centro, una fuerza de restauración debido al anclaje del flujo se ocupa de devolverlo a su posición. Esto que se conoce como la rigidez magnética de los cojinetes, puede generar vibraciones en los mismos según el eje de rotación debido a la baja rigidez y amortiguamiento inherentes de la superconductividad, generando problemas que hay que resolver.

Por lo tanto la rigidez, (la baja rigidez) es un tema a tener muy en cuenta a la hora de utilizar los CSHP en ese tipo de sistemas, ya que el comportamiento dinámico del cojinete depende principalmente de la rigidez de la levitación, existiendo estudios que analizan la variación de la rigidez para movimientos angular y de traslación.

Con el fin de evaluar la rigidez de un cojinete magnético superconductor y la fuerza de repulsión, otros estudios más prácticos [Komori], analizan el sistema formado por un superconductor sumergido en nitrógeno líquido que se sujeta a la base de una maquina que tiene el movimiento horizontal permitido y un imán que se sujeta al elemento de la maquina que tiene permitido el movimiento vertical [Komori].

Y por ultimo, se han sugerido hasta el momento varias clases de construcción de cojinetes para mejorar la rigidez, pero las mejoras conllevan complicadas estructuras de circuitos magnéticos, los cuales hacen del análisis de los cojinetes y su realización verdaderamente difícil. Debido a ello, hay trabajos ^[Okano] que se dedican a elaborar programas de análisis numérico que empleando el método del potencial escalar en 3-D basado en el modelo de estado critico (critical state model), proceden al estudio de la mejora de la rigidez. La validez de estos programas son puestos a prueba en aplicaciones sobre cojinetes superconductores tipo disco.

3. LEVITACION MAGNETICA SUPERCONDUCTORA EN ESTADO MEISSNER. FACTOR 2 DE PD-GP

Con respecto a la levitación superconductora, es conveniente mencionar las conclusiones obtenidas por Pérez Díaz y García Prada ^{[Pérez Díaz-García Prada](1)} con relación a la re-interpretación del método de las imágenes para el calculo de la fuerza de levitación con el fin de eliminar la discrepancia que se viene arrastrando al utilizar dos maneras de obtener la citada fuerza y no encontrar una explicación a su diferencia.

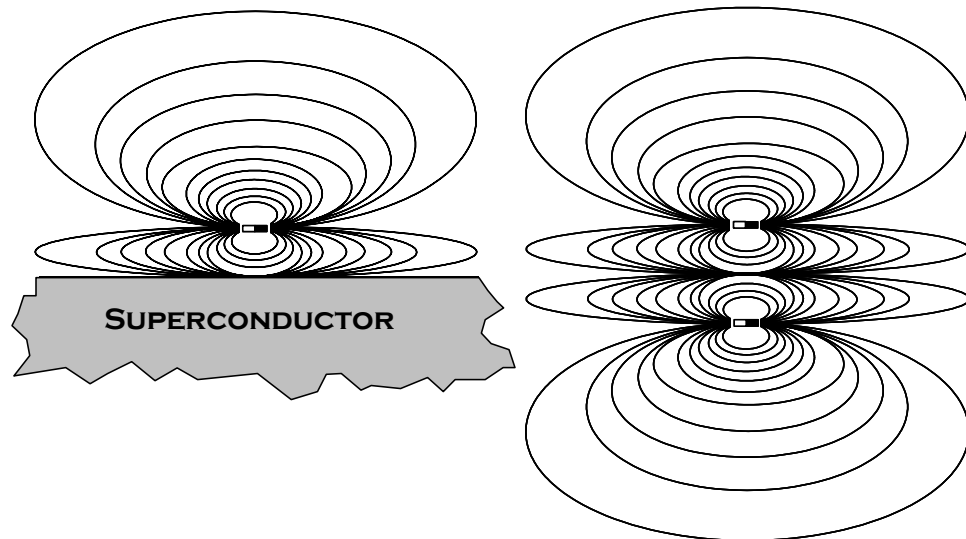
No es ni mucho menos un asunto menor ya que como se ha dicho no solo aclara la formulación si no que contribuye al entendimiento del método de las imágenes como un fenómeno físico empujando esta aclaración a la revisión de experimentos previos desde este nuevo enfoque. Además y como contribución por parte de esta tesis en el ultimo punto de este capitulo se desarrolla el planteamiento de PD-GP aplicándolo a cualquier forma superficial del superconductor y universalizándola para cualquier perturbación.

3.1. Análisis

Es bien conocido que existe una fuerza repulsiva entre un imán permanente y un material en fase superconductora ^[Arkadiev]. Esta fuerza se debe a la repulsión del campo magnético por el superconductor mas conocido como efecto Meissner. El primer intento de utilizar este efecto fue en 1953 mediante su aplicación en forma de cojinete ^[Simon] y no fue hasta 1958 ^[Buchhold] ^[Schoch] cuando este tipo de cojinetes se emplearon como componentes de un motor alentados por el descubrimiento de los HTSC ^[Bednorz].

El sistema habitual para la descripción del comportamiento de un imán permanente sobre un superconductor es mediante el método de las imágenes. Este método se ha demostrado útil tanto para los superconductores Tipo I como Tipo II, y aunque la forma mas simple de plantear el problema es considerando el superconductor como si fuese plano y de dimensiones infinitas también se ha extendido su aplicación a otras geometrías mas realistas.

El método de las imágenes consiste en sustituir el superconductor por otro imán situado de manera especular respecto del plano del superconductor con el fin de conseguir el efecto repulsivo que sobre el imán real produce el superconductor (Meissner).



Con este método se puede describir el campo magnético fuera del superconductor, como la suma del campo generado por el imán real y el imán especular.

Si consideramos el imán como si fuese un dipolo magnético m , por magneto estática conocemos ^[Jackson] la expresión del campo generado por éste a una distancia r del mismo, cuando está situado en el origen de coordenadas:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}$$

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}}{r}$$

$$r = |r|$$

Para su aplicación al método de las imágenes, consideraremos que el origen del sistema de coordenadas esta a la mitad de la distancia entre el dipolo real y el espejular, es decir en la posición que tendría en el problema inicial el superconductor. Según esto, la expresión del campo generado por el dipolo real sería:

$$\bar{H}_r(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{3 \left[\frac{(\bar{x} - \bar{x}_r)}{|\bar{x} - \bar{x}_r|} \right] \left[\left[\frac{(\bar{x} - \bar{x}_r)}{|\bar{x} - \bar{x}_r|} \right] \cdot \bar{m}_r \right]}{[\bar{r}]^3} - \frac{\bar{m}_r}{[\bar{r}]^3} \right\rangle$$

Y el campo generado por el dipolo espejular:

$$\bar{H}_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{3 \left[\frac{(\bar{x} - \bar{x}_i)}{|\bar{x} - \bar{x}_i|} \right] \left[\left[\frac{(\bar{x} - \bar{x}_i)}{|\bar{x} - \bar{x}_i|} \right] \cdot \bar{m}_i \right]}{[\bar{r}]^3} - \frac{\bar{m}_i}{[\bar{r}]^3} \right\rangle$$

Sumando los dos efectos, tendríamos la expresión del campo magnético de un dipolo magnético en presencia de un superconductor plano infinito:

$$\bar{H}(\bar{x}) = \bar{H}_r(\bar{x}) + \bar{H}_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{3[(\bar{x} - \bar{x}_r)][(\bar{x} - \bar{x}_r) \cdot \bar{m}_r]}{[\bar{r}]^3} - \frac{\bar{m}_r}{[\bar{r}]^3} \right\rangle + \left\langle \frac{3[(\bar{x} - \bar{x}_i)][(\bar{x} - \bar{x}_i) \cdot \bar{m}_i]}{[\bar{r}]^3} - \frac{\bar{m}_i}{[\bar{r}]^3} \right\rangle$$

Este campo es tangencial a la superficie del superconductor, es decir satisface la condición de contorno impuesta por el superconductor de que no exista campo magnético en su interior.

En el modelo real, en la superficie del superconductor existen corrientes superconductoras que serian las encargadas de generar el equivalente del campo magnético del dipolo especular y obligar a que el campo magnético del dipolo real sea tangente a la superficie del superconductor.

Desde el punto de vista mecánico lo que interesa conocer es la fuerza ejercida por el superconductor sobre el dipolo magnético real, ya que esta fuerza es la que puede hacer levitar al dipolo si compensa el peso del mismo. Es en este punto donde existen discrepancias en el modo en que se describe y calcula la citada fuerza.

3.2. Modelos teóricos de levitación superconductora en estado Meissner

3.2.1. Modelo de la fuerza directa

Este modelo calcula la fuerza entre el superconductor y el dipolo real, ^[Hull] ^{[Postrekhin][Moon 1]} como la fuerza que aparece entre el dipolo real y el dipolo especular según el método de las imágenes.

La expresión de la fuerza ejercida sobre un dipolo por la presencia de otro dipolo es conocida de la magneto estática:

$$\vec{F}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[\frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)\vec{r} + (\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{m}_2 + (\vec{m}_2 \cdot \vec{r})\vec{m}_1}{|\vec{r}|^5} \right] - \left[5 \frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})(\vec{m}_2 \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^7} \right] \right\}$$

Esta fuerza también puede ser obtenida como la fuerza que sufre un dipolo cuando esta sumergido en un campo magnético:

$$\vec{F} = \mu_0 \nabla (\vec{m}_2 \cdot \vec{H}_1)$$

La expresión de la fuerza de sustentación sobre un dipolo magnético m inclinado un ángulo θ con respecto al eje vertical y a una distancia z del superconductor plano infinito es:

$$F_z = \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi} \frac{1 + \cos^2(\theta)}{(2z)^4}$$

3.2.2. Modelo de la energía potencial

Este modelo utiliza la expresión de la energía potencial generada por dos dipolos magnéticos a una distancia r ^{[Yang][Coffey][Cansiz]}.

$$V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\bar{r} \cdot \bar{m}_1)(\bar{r} \cdot \bar{m}_2)}{|\bar{r}|^5} - \frac{\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2}{|\bar{r}|^3} \right]$$

La expresión de la energía potencial también se puede obtener como la energía potencial generada por un dipolo cuando esta sumergido en un campo magnético:

$$V = -\mu_0 \bar{m}_2 \cdot \bar{H}_1$$

La expresión de la energía potencial generada por un dipolo magnético m inclinado un ángulo θ con respecto al eje vertical y a una distancia z del superconductor plano infinito es:

$$V = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi} \frac{1 + \cos^2(\theta)}{(2z)^3}$$

De la cual se deriva una fuerza sobre dipolo magnético m :

$$F_z = 2 \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi} \frac{1 + \cos^2(\theta)}{(2z)^4}$$

3.3. Comparación de modelos

De la simple observación de los resultados de los modelos, se observa la discrepancia en el resultado de los mismos, obteniendo el modelo del potencial un resultado reforzado para la fuerza de sustentación el doble del valor obtenido por el modelo de la fuerza.

Esta discrepancia ya fue apuntada por otros autores ^[Giario] para otro tipo de problemas, como es el caso de una carga situada a una distancia sobre un plano conductor a potencial cero.

Ambos problemas son equivalentes y la física que subyace bajo ellos es similar.

En el caso eléctrico, el campo eléctrico total para la configuración real formada por una carga y un plano conductor a potencial cero es el mismo que si la configuración esta formada por dos cargas opuestas separadas el doble de la distancia que existe entre la carga real y el plano.

En este caso aplicando el Modelo de la Fuerza, se obtiene la expresión:

$$F_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2z)^2}$$

Mientras que ampliando el Modelo del Potencial se obtiene una expresión:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2z)}$$

De la cual se deriva la correspondiente a la fuerza:

$$F_z = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2z)^2}$$

Apreciándose entre ambas expresiones para la fuerza la misma discrepancia.

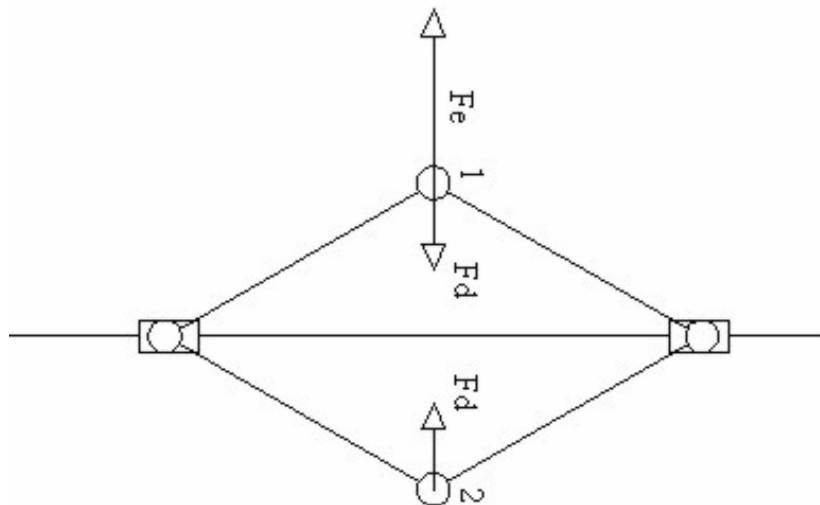
Giara considero que el resultado correcto es el obtenido por el modelo de la fuerza y propone que el verdadero potencial es el que se obtiene integrando la fuerza obtenida por el modelo de la fuerza el cual da un valor de la mitad al potencial con respecto al obtenido por el modelo del potencial. El argumento del autor se puede condensar en:

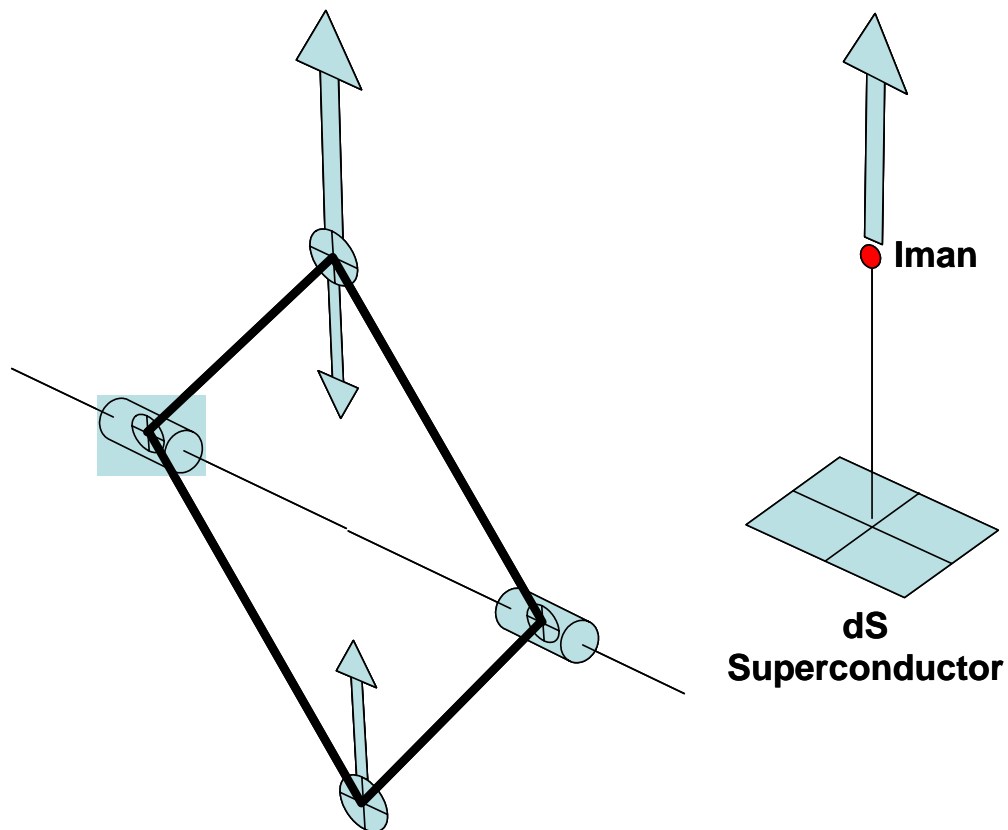
Si el campo que actúa sobre la carga real es igual al generado por la carga imagen, entonces la fuerza ejercida sobre la carga real será justamente la misma a la que sería ejercida por la carga imagen

3.4. Mecanismo equivalente e interpretación

Al considerar como camino correcto el modelo de la fuerza, pone en entredicho la energía potencial de Coulomb, y ya que la energía potencial de Coulomb se ha comprobado que describe correctamente no solo la mecánica clásica si no también la mecánica cuántica y se ha utilizado también para formalismos en la mecánica Hamiltoniana o Lagrangiana ^[Goldstein], si consideramos que el argumento del autor es correcto se abre un interrogante al porque de esta excepción en el potencial de Coulomb.

Pérez Díaz-García Prada, ^{[Pérez Díaz-García Prada](1)} han propuesto que el modelo del potencial describe correctamente la fuerza de sustentación ejercidas por el superconductor sobre el dipolo, mientras que el modelo de la fuerza describe correctamente la fuerza entre los dipolos real e imagen. Esta diferenciación se basa en el hecho de que estas dos fuerzas no son las mismas ya que el dipolo imagen no esta fijada en el espacio como si lo esta el superconductor.





Aclarando las cosas mediante analogía con un modelo mecánico formado por cuatro barras las cuales se relacionan dos a dos con uniones deslizantes y uniones por rotulas y suponiendo que entre las rotulas existen fuerzas de atracción, la fuerza externa que mantiene el sistema en equilibrio es el doble de la fuerza interna, esta fuerza sería la fuerza de sustentación o fuerza que ejerce el superconductor sobre el dipolo magnético. Mientras que la fuerza interna sería la equivalente a la fuerza que se ejercen los dipolos entre sí.

Este planteamiento aclara la discrepancia entre los dos modelos y fija cual de ellos es el que se debe utilizar para los cálculos en los que se precise conocer la fuerza de levitación.

Esta conclusión debería abrir el campo de la reinterpretación ofrecida por muchos trabajos ^[Hull] al exceso de fuerza que aparece en ensayos de laboratorio cuando intentan compararlo con el resultado teórico ofrecido por el modelo de las fuerzas.

Sin embargo el citado trabajo [Pérez Díaz-García Prada](1) solo demuestra la existencia de ese factor 2 para el caso del plano infinito.

3.5. Universalidad del factor 2 de PD-GP

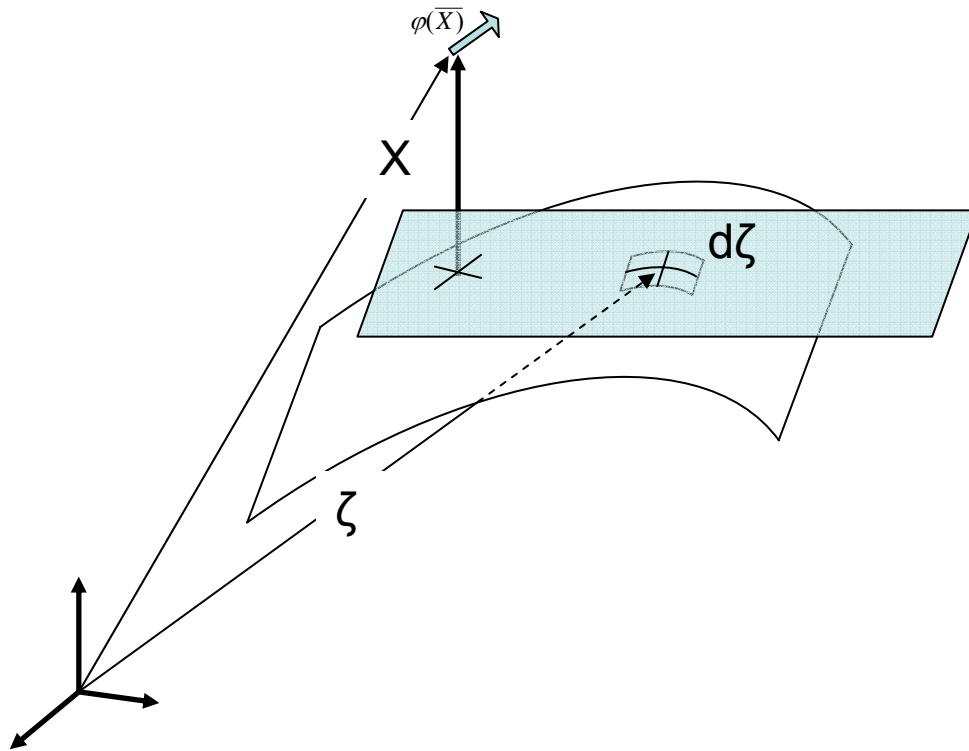
En este apartado se demuestra la universalidad del factor 2 para cualquier forma geométrica de la superficie del superconductor y para cualquier perturbación.

Situando la perturbación en una posición espacial X con respecto a un sistema de referencia y teniendo el elemento diferencial de superficie del superconductor en la posición ζ con respecto al mismo sistema de referencia, se demuestra que la contribución a la energía total del sistema de este elemento diferencial de superficie del superconductor, se puede obtener haciendo pasar por ζ el plano osculador al elemento diferencial de superficie y encontrando la imagen de la perturbación con relación a ese plano.

Expresando todo esto de una manera formal:

perturbación $\varphi(\overline{X})$

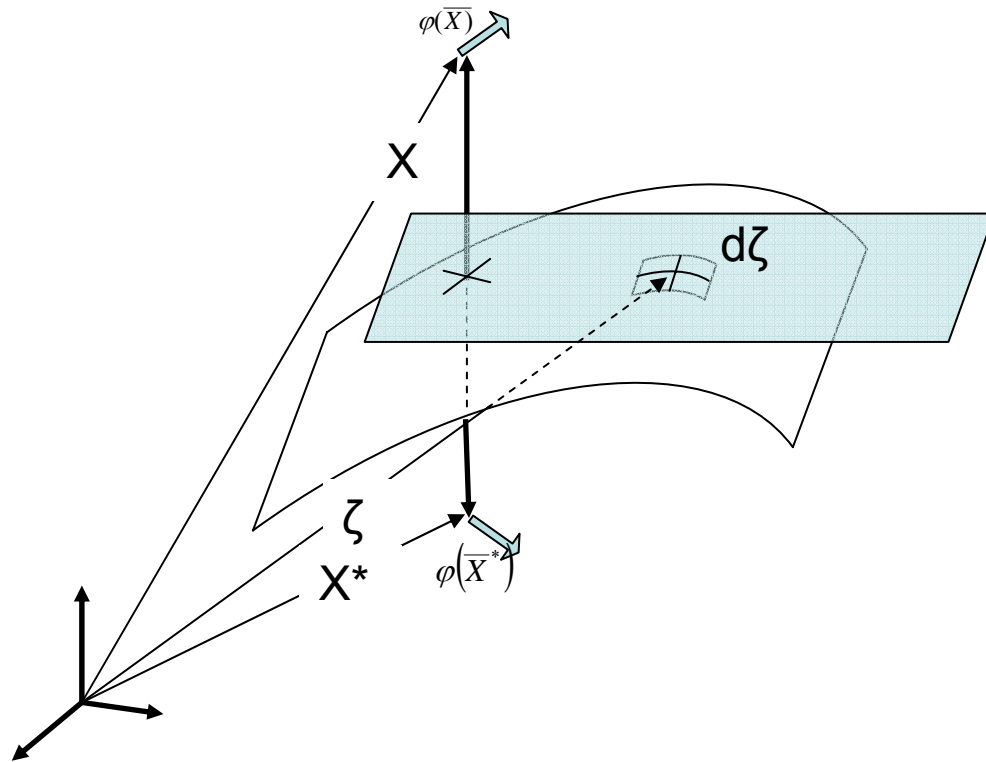
Propagador $G(\overline{\zeta}, \overline{X})$



Aplicando el método de las imágenes con respecto al plano osculador de $d\zeta$,
aparece:

perturbación imagen $\varphi(\overline{X}^*)$

Propagador para la imagen $G(\overline{\zeta}, \overline{X}^*)$

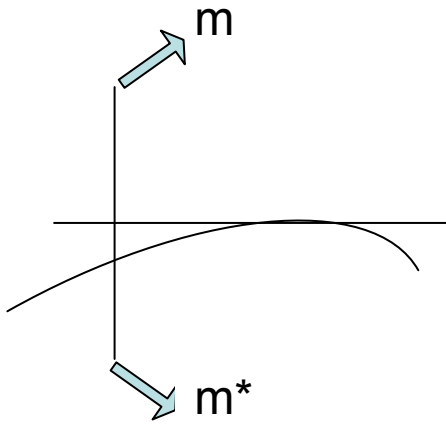


Entonces, la contribución a la energía total del sistema de este elemento diferencial se expresa:

$$\frac{\partial U(\bar{X}, \bar{X}^*)}{\partial S} = \langle \phi(\bar{X}) | G(\bar{\zeta}, \bar{X}^*) G(\bar{\zeta}, \bar{X}^*) | \phi(\bar{X}^*) \rangle$$

De manera que manteniendo fija la posición de la perturbación imagen, la fuerza que se genera sobre la perturbación real con su posición variable es:

$$\frac{dF_{fija}}{dS} = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial S} \right|_{\bar{X}^* = cte}$$



Mientras que la fuerza que se genera sobre la perturbación real con la posición relajada tanto para esta como para la perturbación imagen, se obtiene:

$$\frac{dF_{real}}{dS} = - \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial S} \Big|_{\bar{X}^* = -\bar{X}}$$

Donde $\bar{X}^* = -\bar{X}$ indica que la posición de la perturbación imagen es simétrica de la perturbación real.

Por lo tanto la fuerza real por unidad de superficie:

$$\frac{dF_{real}}{dS} = -2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial S} \Big|_{\bar{X}^* = cte} = 2 \frac{dF_{fija}}{dS}$$

Es decir, aparece el factor 2 también para cada elemento de superficie. Demostrándose que todo el desarrollo es genérico y valido en aquellos escenarios donde el método de las imágenes sea aplicable.

4. LEVITACION MAGNETICA SUPERCONDUCTORA EN ESTADO MEISSNER. APLICABILIDAD GENERAL DEL MODELO PD-GP.

4.1. Descripción del modelo

4.1.1. Introducción

La repulsión que aparece entre un imán permanente y un superconductor ha sido tradicionalmente interpretada como debida a la exclusión por parte del superconductor del campo magnético de su interior ^[Alario] conociéndose a este fenómeno con el nombre de efecto Meissner. Esta fuerza ha sido empleada como fuerza contra-gravitatoria en el fenómeno de la levitación, pero no puede explicar en principio el fenómeno también posible de la suspensión. En 1988 se reporto ^[Peters] un experimento sobre suspensión mediante el cual un pequeño elemento superconductor fue suspendido bajo un imán permanente, así como también se describió la estabilidad para el caso de la levitación ^[Brandt].

Hasta recientemente se asumía que la expulsión del campo magnético no podía explicar la existencia de fuerzas atractivas en la levitación superconductora se asumió que la penetración del flujo con un consecuente anclaje y arrastre del mismo explicaba la evidencia de las fuerzas atractivas, así como, la estabilidad que aparece tanto en el fenómeno de la levitación como en el de la suspensión. Hoy en día es bien conocido y demostrado, que existe tal penetración del flujo magnético ^[Alario] en el superconductor bajo la condición de que el campo magnético aplicado supere el primer limite critico en un grupo de superconductores conocidos como superconductores Tipo II.

Hasta ahora no se ha dispuesto de una descripción de las corrientes superconductoras. Pérez Díaz y García Prada ^{[Pérez Díaz-García Prada](2)} han propuesto una expresión para describirlas y empleándola han demostrado que puede darse la estabilidad en la levitación superconductora en estado Meissner. Por lo tanto, satisfaciendo las ecuaciones de Maxwell y London, tanto la atracción como la estabilidad pueden surgir simplemente de la repulsión del campo magnético, pero con la condición de que el superconductor tenga un tamaño finito. Es decir va a ser la presencia de un contorno en la superconducción la responsable de que aparezcan fenómenos atractivos que pasaron desapercibidos por el planteamiento teórico simplista y reduccionista al suponer plano e infinito el superconductor.

Se va a realizar el cálculo de la fuerza entre un dipolo magnético y un superconductor con forma definida y finita en estado Meissner ($H < H_{c1}$) aplicando una expresión propuesta por PD-GP y basada en las ecuaciones de Maxwell y London. Esta fuerza que en principio resultaría ser siempre repulsiva e inestable cuando se aplica a sistemas infinitos, cosa que contradice la realidad, cuando se aplica a elementos superconductores finitos, caso del cilindro en estudio, se demuestra que aparece atracción y estabilidad. Por lo tanto, la finitud del elemento superconductor se demostrara suficiente para explicar la estabilidad de la levitación de un imán sobre el superconductor así como también el fenómeno de la suspensión del superconductor bajo el imán.

Este planteamiento y resultado no contradicen ni niegan la existencia de la teoría de penetración de flujo únicamente libera a esta ultima de la “culpabilidad” total, que es como se había hecho hasta ahora, descargándola y asignando a cada una de las teorías

(finitud y penetración) su parte de responsabilidad en el resultado de la existencia de atracción y estabilidad.

4.1.2.método

En un capítulo posterior, se expondrá un modelo universal que permite describir la mecánica del sistema superconductor-imán. Este modelo puede ser utilizado con tal de que el campo magnético aplicado sea menor que el primer campo crítico, es decir dentro del estado Meissner, y asumiendo que el campo eléctrico no varíe con el tiempo. Con estas premisas y basándose únicamente en las ecuaciones de Maxwell y London se obtendrá la fuerza elemental por unidad de superficie ejercida por el imán sobre el superconductor, estando escrita en unidades MKS como:

$$\frac{dF}{dS} = 4 \mu_0 (n_s \times H^{ap}) \times H^{ap}$$

[1]

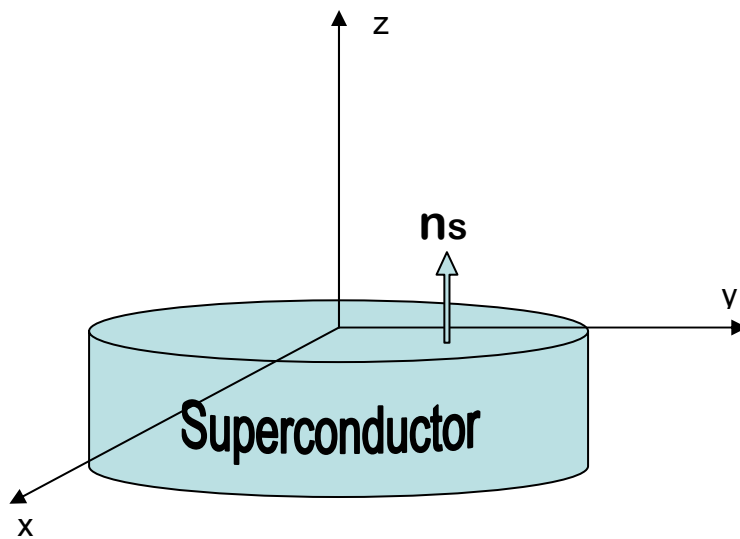
Donde μ_0 es la permeabilidad del aire (o vacío), y H^{ap} es el campo magnético generado por el imán justo sobre la superficie del superconductor.

Esta misma será la fuerza ejercida sobre el imán basándose en la tercera ley de Newton.

Para cualquier forma del superconductor podemos escribir entonces la fuerza ejercida por el superconductor sobre el imán como:

$$F = - \int_{Sc} 4 \mu_0 (n_s \times H^{ap}) \times H^{ap} dS \quad [2]$$

Donde n_s es un versor (vector unidad) ortogonal a la superficie y la integral se extiende a toda la superficie del superconductor.



Para conseguir comparar fácilmente con valores experimentales ^[Hull], tomamos:

Momento magnético $m=1,064 \text{ [A.m}^2\text{]}$

Correspondientes a un imán cilíndrico de:

Imanación $M=0,831 \text{ [T]}$

diámetro= $12,7 \text{ [mm]}$

altura= $12,7 \text{ [mm]}$

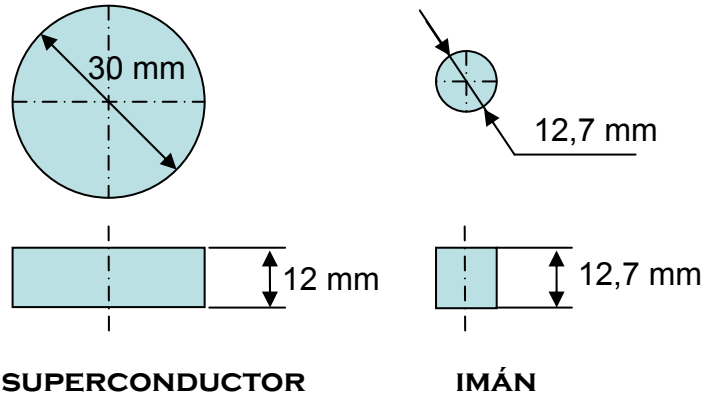
se asume también que el momento magnético está concentrado en un punto de coordenadas (x,y,z) .

Mientras que para los superconductores emplearemos dos configuraciones:

1.- Para el caso que empleemos un superconductor finito, este será también cilíndrico y de dimensiones:

diámetro=30mm

altura=12mm



2.- También haremos cálculos para el caso que el superconductor sea plano infinito.

Cuando el conductor sea de este tipo, el origen de coordenadas se situará en el plano del superconductor y el eje z perpendicular al mismo. Mientras que cuando el superconductor sea cilíndrico, pondremos el origen de coordenadas como se ve en la figura, en el centro de la superficie de la cara superior del cilindro, siendo el eje z el eje de revolución del cilindro.

4.1.3. Superconductor plano infinito

En este caso la integración de la formula [2]

$$F_z = 3 \frac{\mu_0}{32\pi} m^2 \frac{1 + \cos^2(\theta)}{z^4}$$

nos da como resultado la formula obtenida también con el método de las imágenes ^[Lin].

En este caso la fuerza de sustentación es siempre positiva, es decir siempre repulsiva y no se puede explicar con ella como ya se ha expuesto ni la atracción ni la estabilidad.

4.1.4. Superconductor cilíndrico finito

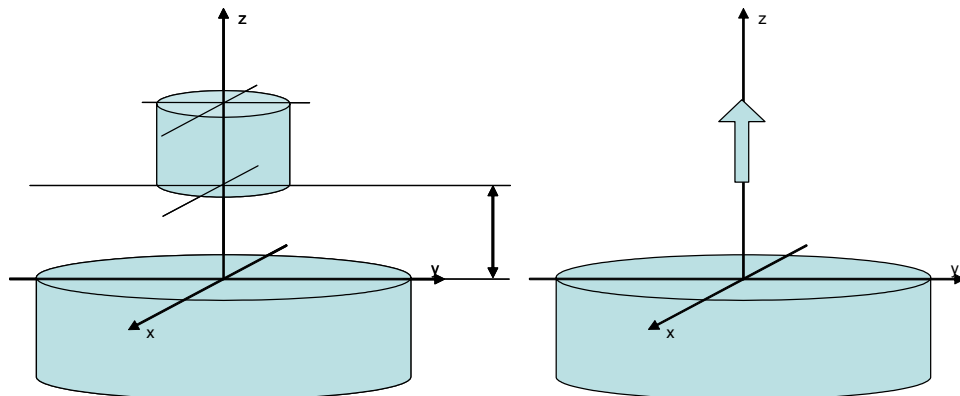
Este caso es completamente diferente. Utilizaremos la ecuación (2) integrando al contorno del superconductor. Evaluaremos la integral como tres componentes:

- 1.- la integral sobre la superficie circular superior
- 2.- la integral sobre la superficie circular inferior
- 3.- la integral sobre la superficie cilíndrica lateral

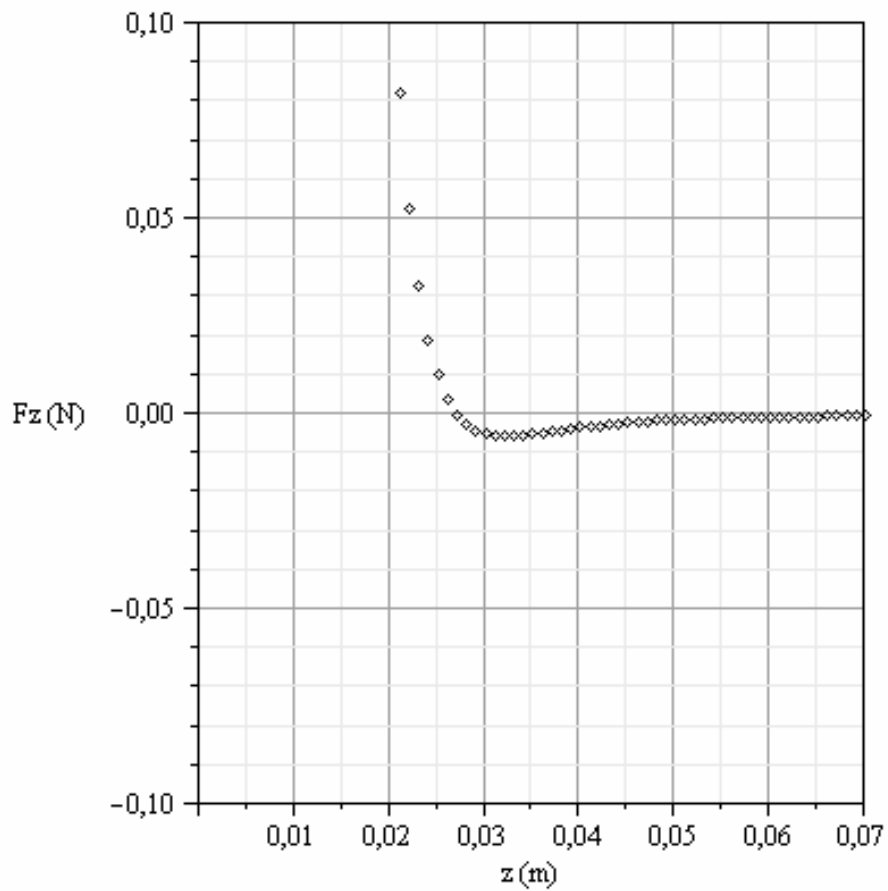
4.1.5. Resultados y comparación

Para el primer resultado partimos de la configuración siguiente:

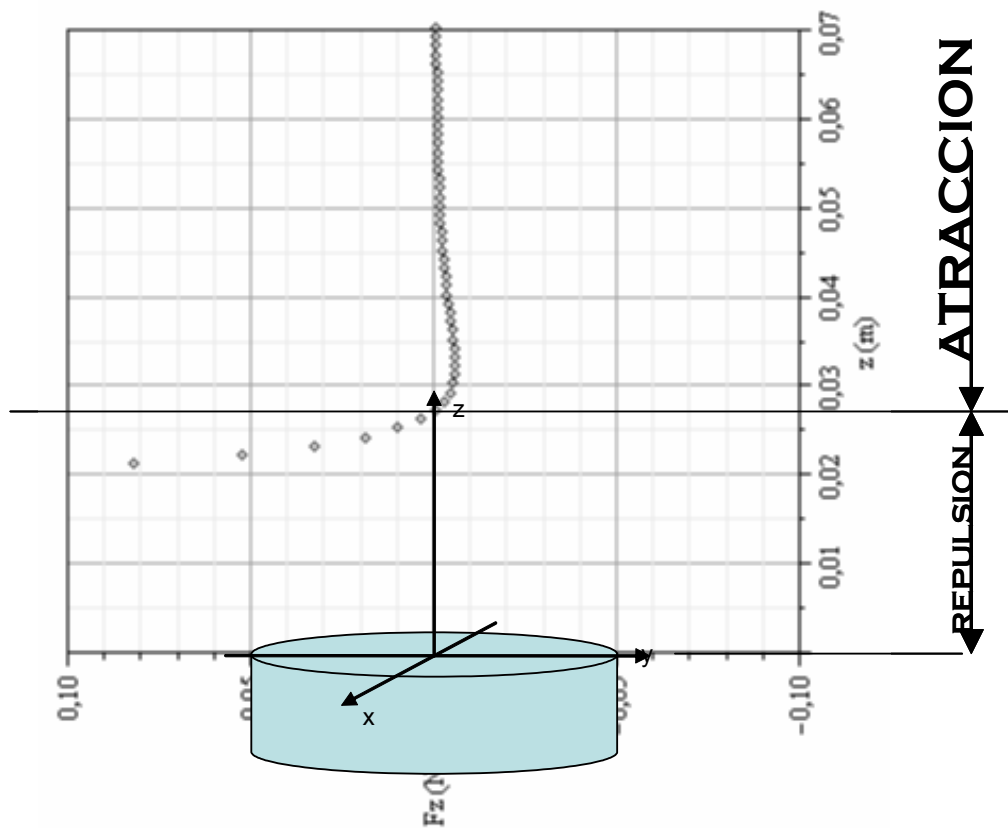
- Imán permanente centrado en el eje z ($x=y=0$)
- Momento magnético del imán verticalmente orientado



En la siguiente grafica se refleja como varia la fuerza vertical F_z con la distancia al superconductor z .



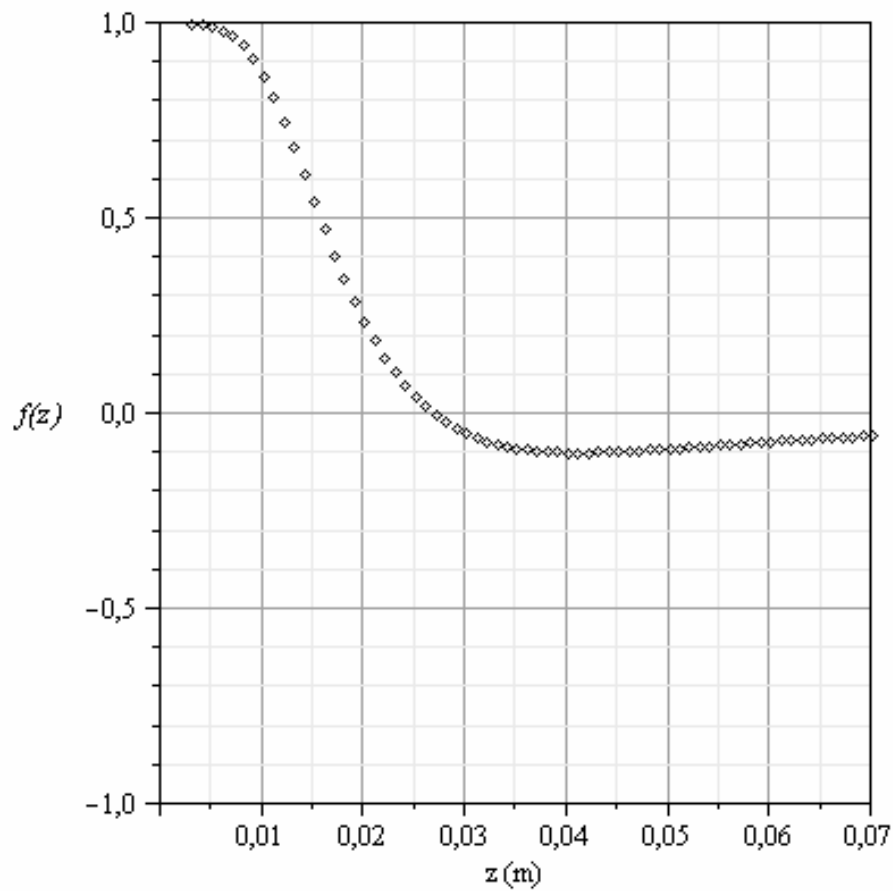
En ella se aprecia que según varía la distancia z de separación al superconductor cambia el carácter de la fuerza de repulsión a atracción cuando la distancia supera un cierto valor.



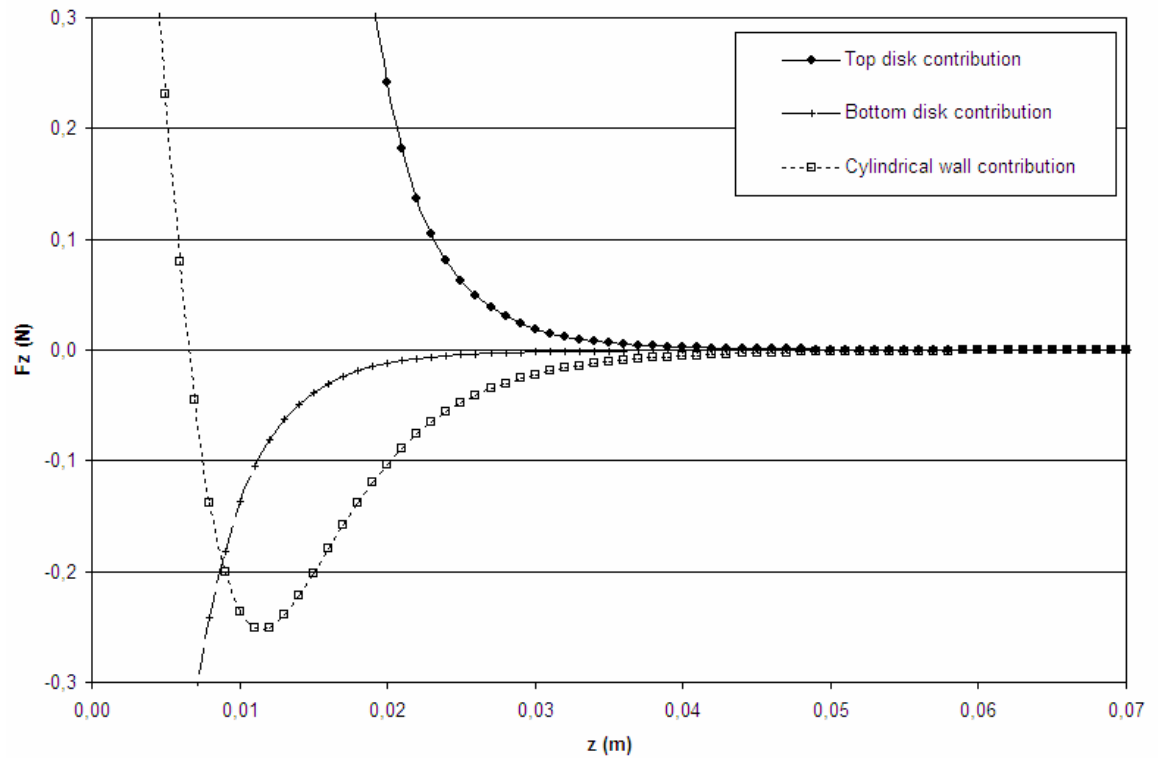
Comparando ambos casos, finito (cilindro) e infinito (plano),

$$f(z) = \frac{F_{zcylinder}(z)}{F_{zplane}(z)}$$

vemos como según nos acercamos a la superficie del superconductor el efecto del tamaño desaparece igualándose ambos resultados. Se puede entender como que al acercarse a la superficie se va perdiendo referencia del contorno, mientras que cuando se aleja, la influencia de la forma es mas fuerte y esta mas presente siendo mas consciente de la misma.



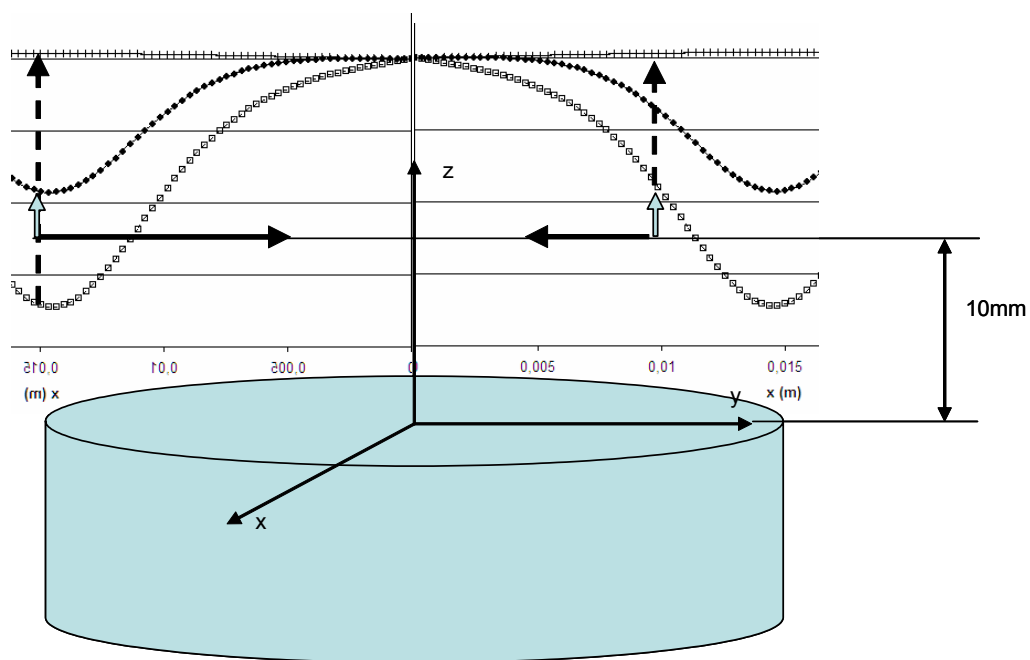
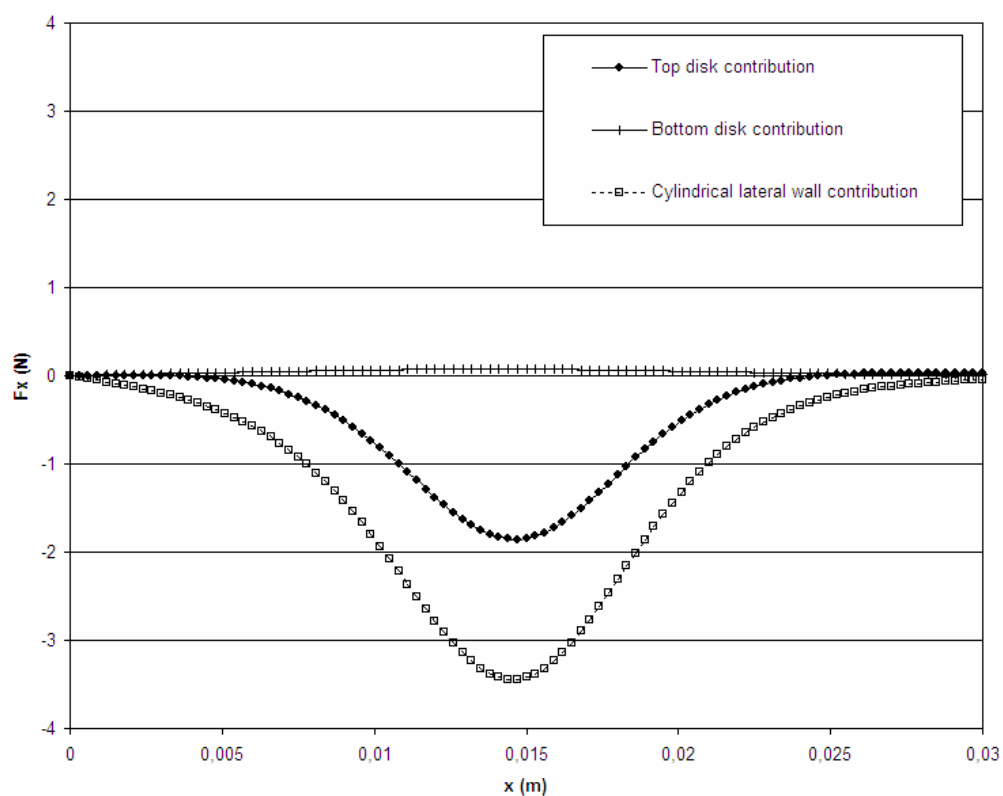
Si descomponemos la fuerza del caso cilíndrico en sus componentes, vemos como contribuye la forma al carácter repulsivo o atractivo de la fuerza y también el orden de magnitud de la misma, apreciándose que el efecto de la “tapa” es siempre repulsivo, que el efecto de la “base” es siempre atractivo pero un orden menor en magnitud que la fuerza de la “tapa” y que el efecto del “lateral” es dependiente de la distancia.



A la vista de estos resultados se podría llegar a confeccionar una forma del superconductor a medida de la fuerza que se quisiera obtener.

También se puede analizar la componente de la fuerza según otros ejes p.e. el eje x , para el mismo caso de imán verticalmente orientado y situado a una altura fija perteneciente a la zona repulsiva vertical. apreciándose que según me desplazo del eje las fuerzas tienen siempre la tendencia a retornar el imán al centro de la cara del superconductor apareciendo la máxima fuerza en el borde. Advertir que estas fuerzas de restauración solo aparecen por efecto del tamaño finito del superconductor, ya que el tamaño infinito como se ha demostrado únicamente tiene carácter repulsivo.

SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER



4.1.6. Conclusiones del modelo PD-GP

Calculando las fuerzas en configuraciones de superconductor finito, se aprecian resultados que pueden explicar la estabilidad de la levitación así como el fenómeno de la suspensión, sin necesidad de recurrir a la explicación de estos comportamientos mediante la penetración del flujo y sus correspondientes anclaje y arrastre que es la forma con que se viene explicando desde 1988.

Se puede concluir de los resultados, que el efecto tamaño es importante a partir de una distancia de separación cambiando el carácter de la fuerza según nos alejamos de la superficie del superconductor, es decir, aparece una especie de miopía hacia la forma cuando nos aproximamos, mientras que si nos alejamos, ese punto de vista distante, nos permite ser consciente de la forma y estar mas influido por ella.

Por otro lado y también muy importante se aprecia que no todas las formas superficiales influyen de la misma manera al carácter de la fuerza, por lo que no solo es importante el tamaño sino también la forma del superconductor.

Como tercera conclusión se aprecia que también influye además de los dos parámetros anteriores de tamaño y forma, la posición relativa a la superficie del mismo apreciándose una elevada influencia del borde del superconductor.

Se podría llegar a poder confeccionar un superconductor a medida teniendo en cuenta el efecto que queremos conseguir según los resultados anteriores que se podrían resumir en que no solo importa el tamaño, si no que también importa la forma y la posición, abriéndose un campo amplísimo de experimentación para la verificación de estos resultados y de diseño de elementos industriales cuyo base sea la levitación. Siempre teniendo presente como se ha dicho en la introducción que este planteamiento y resultado no contradicen ni niegan la existencia de la extendida teoría de penetración

de flujo asignando a esta teoría su parte en el todo de la existencia de atracción y estabilidad.

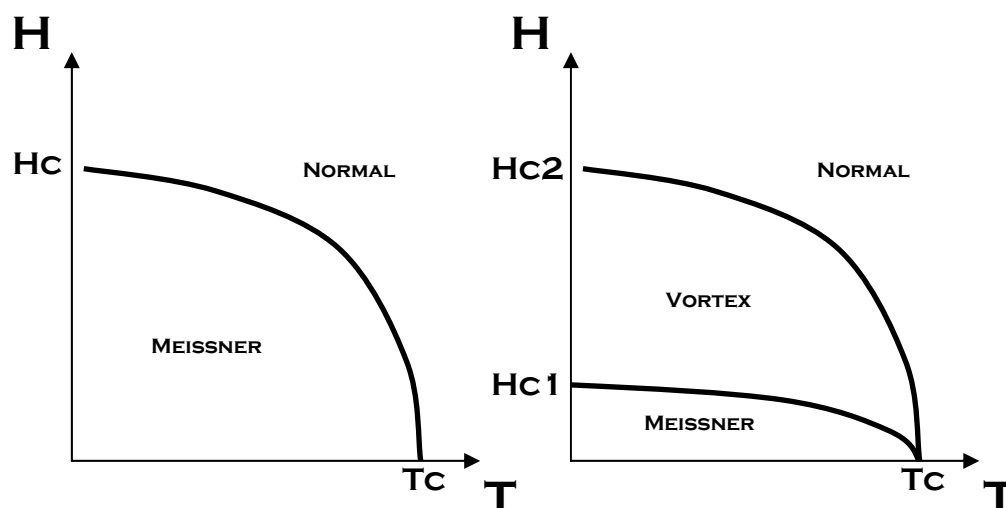
4.2. Demostración del modelo

Mediante la utilización de las ecuaciones de Maxwell y London demostraremos que la expresión PD-GP ^{[Pérez Díaz-García Prada] (2)} es aplicable sea cual sea la forma del superconductor en estado Meissner sirviendo para calcular tanto la fuerza como el momento entre un campo magnético cualquiera y un superconductor en estado Meissner. Esta expresión se va a demostrar útil para cualquier forma y tamaño tanto del imán que genera el campo magnético, como del superconductor y está indicada para cálculos por elementos finitos en el límite estático. Se va a calcular como comprobación la equivalencia entre la nueva expresión de propósito general obtenida, con el método bien conocido de las imágenes para el caso de un superconductor de superficie plana infinita.

Hasta la fecha únicamente existían modelos concretos como el método de las imágenes que tenían limitado su poder de resolución a unos pocos casos de configuraciones geométricas ^[Lin] además de existir discrepancias con resultados experimentales ^[Hull] A partir de ahora con este estudio, se dispone de un modelo universal que permite describir la mecánica del sistema superconductor-imán permanente.

4.2.1. Magneto-mecánica

Como sabemos, se dice que un superconductor está en estado Meissner cuando éste está expuesto a un campo magnético H^{ap} menor que el primer campo crítico H_{c1} .



Este primer campo critico, es una característica del material ^[Alario, Vicent] y depende de la temperatura T .

Para los análisis que seguirán, asumimos que tanto el campo magnético H , como la inducción magnética o la densidad de flujo magnética B son igual a cero dentro del superconductor. Debemos hacer notar que la relación entre los valores locales de H y B en el núcleo de los iones que constituyen el superconductor es una cuestión interesante que esta todavía abierta. En cualquier caso se asume que la media de los momentos magnéticos de los núcleos es nula. Esto significa que la magnetización debida a la orientación del spin de los núcleos es igual a cero.

Cuando se le aplica un campo magnético al superconductor, se generara una corriente superficial en la “piel” del superconductor.

Según las ecuaciones de London, esta corriente esta confinada a una distancia de la superficie denominada profundidad de penetración $\lambda(T)$. Los superconductores Tipo II como por ejemplo los HTSC de óxidos de tierras raras, tienen los valores mas elevados de la profundidad de penetración, alcanzando valores típicos de miles de

angstrom. Por lo tanto si estamos tratando con elementos macroscópicos, podemos aproximar esa corriente como una corriente localizada de valor infinitesimal,

$$\vec{j} = \vec{j}_s(x, y)\delta(z)$$

formada por un campo vectorial tangente a la superficie $\vec{j}_s(x, y)$ y la función delta de Dirac $\delta(z)$ según la normal a la superficie del superconductor (z). Esta corriente hará que el campo magnético total H sea discontinuo cuando pasemos del aire o vacío ($z>0$) al superconductor ($z<0$).

La ecuación de Maxwell en unidades MKSA:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

relaciona ^[Jackson] el campo magnético H, con la densidad de corriente j y el desplazamiento eléctrico D, si asumimos que estamos trabajando en el limite estático, nos queda:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad [1]$$

El campo magnético total H, se puede descomponer en el campo magnético aplicado externamente y el campo magnético generado por las corrientes de superconducción:

$$\vec{H} = \vec{H}^{ap} + \vec{H}^{sc}$$

Además podemos descomponer también el campo magnético total H en su componente vectorial perpendicular a la superficie local del superconductor y la componente vectorial tangente a la misma superficie:

$$\vec{H} = \vec{H}_{\perp} + \vec{H}_{\parallel}$$

Por todo esto, podemos entonces descomponer también:

$$\overline{H}^{ap} = \overline{H}_{\perp}^{ap} + \overline{H}_{//}^{ap}$$

y:

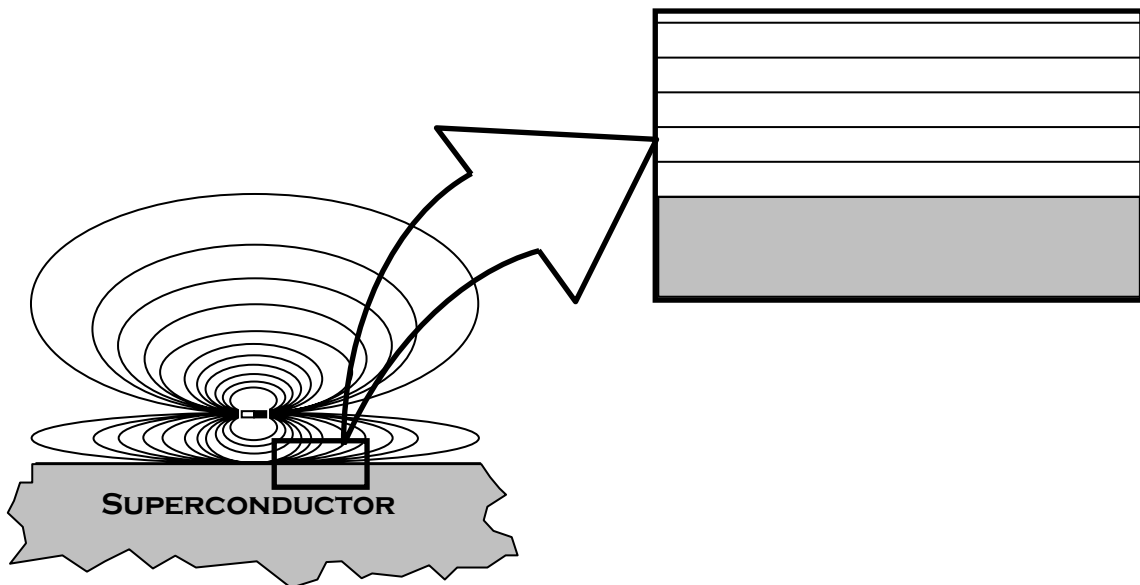
$$\overline{H}^{sc} = \overline{H}_{\perp}^{sc} + \overline{H}_{//}^{sc}$$

La presencia de la densidad de corriente superficial de superconducción, como ya hemos dicho, hace discontinuo el campo magnético en z de manera que:

$$H(z>0) \neq 0 \text{ mientras que } H(z<0)=0$$

Y como el H^{ap} es un campo vectorial continuo, obliga a que el H^{sc} sea también discontinuo.

En concreto, en el limite infinitesimal con respecto a la superficie del superconductor, únicamente tendremos componentes tangentes a esta superficie para cumplir la condición de contorno,



Las líneas de campo cerca del superconductor se ajustan al contorno

por lo tanto quedándonos únicamente con la componente tangente y según se aprecia en la siguiente figura, obtenemos:

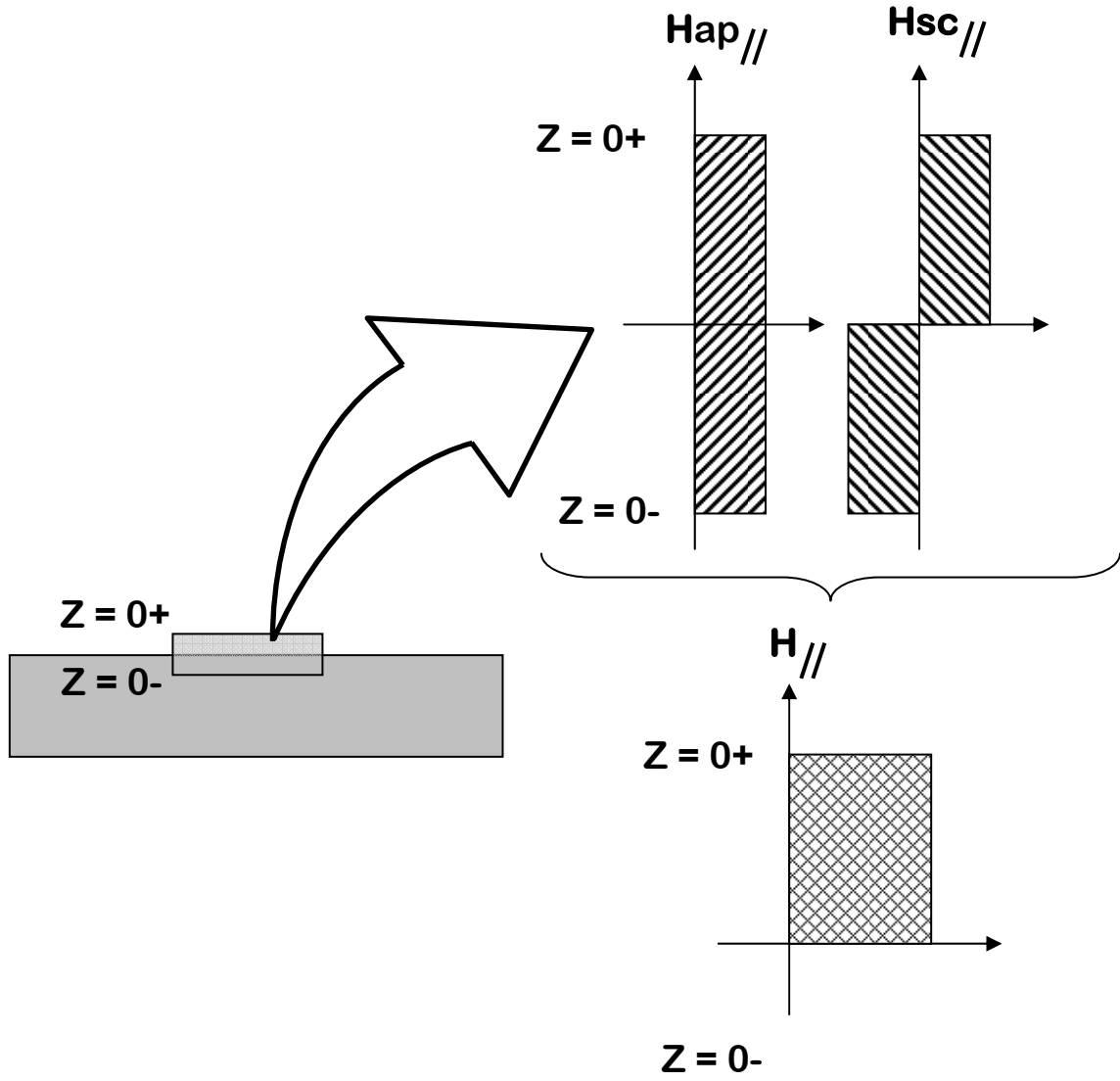
$$\overline{H}_{//}^{ap} = \text{continua_en_} z$$

$$\overline{H}_{//}^{sc} = \text{discontinua_en_} z$$

$$\Rightarrow \overline{H}_{//}^{sc}(z = 0^-) = -\overline{H}_{//}^{ap}(z = 0^-)$$

$$\Rightarrow \overline{H}_{//}^{sc}(z = 0^+) = \overline{H}_{//}^{ap}(z = 0^+)$$

[2]



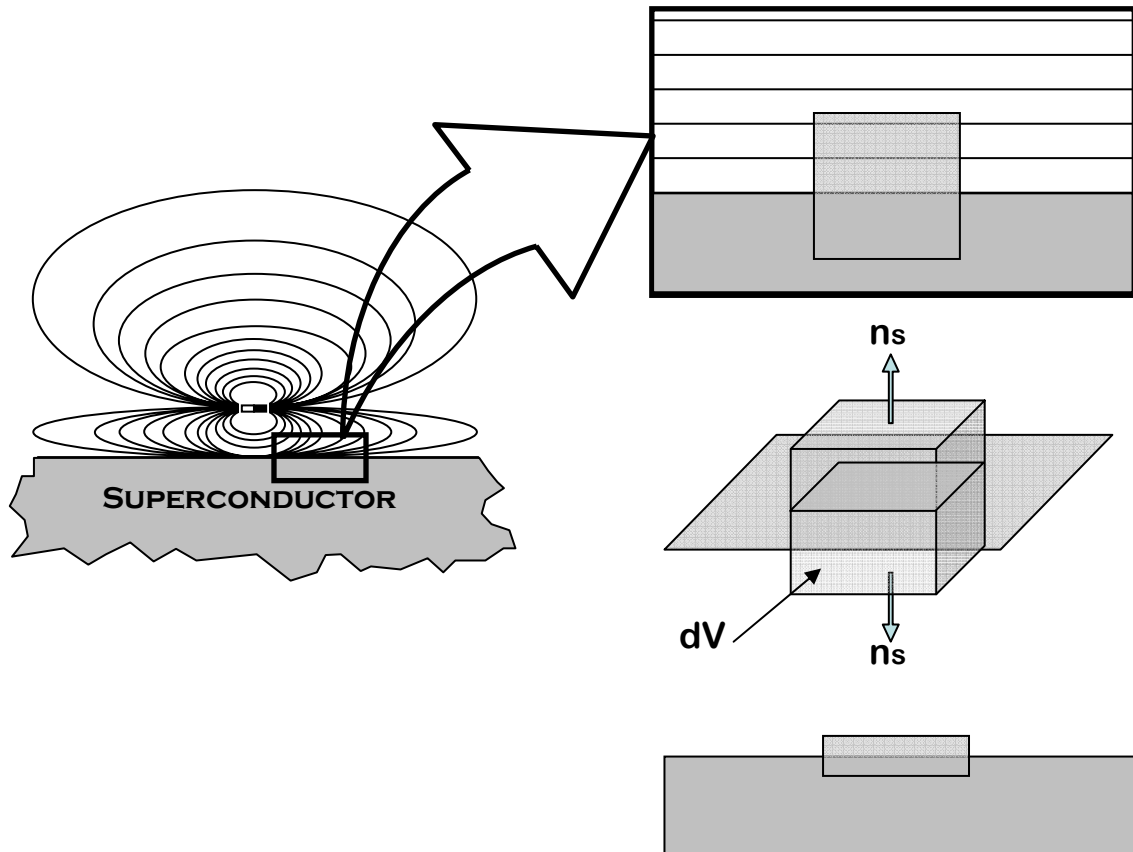
Componentes del campo magnético paralelo a la superficie del superconductor próximo a éste

Si tomamos ahora un volumen diferencial en las cercanías de la superficie del superconductor, y realizamos la integral volumétrica de la ecuación [1]:

$$\int_V (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{v} = \int_V \vec{j} \cdot d\vec{v}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al rotor del campo magnético:

$$\int_V (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{v} = \int_S (\vec{n}_s \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$$



Construcción de un paralelepípedo de dV con su centro en la superficie del superconductor

Si hacemos $dz \rightarrow 0$:

$$\int_{ss+si} (\vec{n}_s \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_{ss+si} (\vec{n}_s \times \vec{H}_{//}) \cdot d\vec{s} \quad [3]$$

Mientras que para la integral volumétrica de la densidad de corriente superficial de superconducción queda:

$$\int_V \bar{j} \cdot dv = \int_V \bar{j}_s(x, y) \cdot \delta(z) \cdot dv = \int_{ss+si} \bar{j}_s(x, y) \cdot ds \quad [4]$$

Entonces igualando de nuevo ambos resultados: [3] y [4]

$$\int_{ss+si} \bar{j}_s(x, y) \cdot ds = \int_{ss+si} (\bar{n}_s \times \bar{H}_{//}) \cdot ds$$

Eliminando las integrales, queda:

$$\bar{j}_s(x, y) = \bar{n}_s \times \bar{H}_{//}$$

Descomponiendo y teniendo en cuenta los resultados de [2], resulta:

$$\bar{j}_s(x, y) = \bar{n}_s \times (\bar{H}_{//}^{ap} + \bar{H}_{//}^{sc}) = 2\bar{n}_s \times \bar{H}_{//}^{ap} = 2\bar{n}_s \times \bar{H}^{ap}$$

Es decir se obtiene la densidad de corriente superficial de superconducción relacionada únicamente con el campo magnético aplicado:

$$\bar{j}_s(x, y) = 2\bar{n}_s \times \bar{H}^{ap}$$

[5]

Aplicando el teorema de la divergencia, es fácil observar que la carga total siempre se conserva, para cualquier forma de la superficie del superconductor siempre que la fuente que genera el campo aplicado esté situada fuera del superconductor:

$$\int_S j_s dS = \int_S 2 n_s \times H^{ap} dS = \int_V \nabla \times H^{ap} d^3x = 0$$

también se puede escribir $H_{\perp} = H_{\perp}^{ap} + H_{\perp}^{sc} = 0$ la cual es consistente con las expresiones previas para la corriente de superconducción.

Por lo tanto el campo total generado por el plano infinito es equivalente al generado por el método de las imágenes ^{[Hellman] [Varessi]}. Esta nueva expresión debido a

que ha sido derivada utilizando argumentos locales, puede ser utilizada para cualquier forma del superconductor, por lo que no se ve influida por la curvatura de la superficie.

Podemos también calcular la fuerza externa por unidad de superficie que soporta el superconductor, mediante la expresión:

$$\frac{dF}{dS} = 2 \ j_s \times B^{ap}$$

La cual es dos veces la fuerza obtenida utilizando la expresión de Lorentz para la corriente de superconducción en el campo magnético aplicado. Como se ha demostrado en el capítulo 3 de esta tesis.

Empleando la expresión anterior para la corriente de superconducción y la ecuación constituyente para el aire (medio en el cual el campo es generado)

$$B^{ap} = \mu_0 H^{ap}$$

Donde μ_0 es la permeabilidad del aire (o vacío), podemos escribir:

$$\frac{dF}{dS} = 4 \ \mu_0 (j_s \times H^{ap}) \times H^{ap}$$

[6]

Esta es una expresión local y exacta para la presión o de manera mas precisa el esfuerzo o fuerza por unidad de superficie sobre el superconductor, la cual depende únicamente del campo magnético aplicado. Esta expresión es valida para cualquier forma del superconductor y se diferencia esencialmente de la expresión general para el esfuerzo magnético entre imanes dada por Moon^[Moon].

4.2.2. Equivalencia con el método de las imágenes: caso de superconductor plano infinito

Para probar la equivalencia entre las expresiones deducidas y el método de las imágenes, podemos calcular el caso de un imán permanente de momento magnético \vec{m} , situado a una altura de z sobre un superconductor plano infinito estando el momento magnético orientado de tal manera que forma un ángulo θ con el eje z que es el ortogonal al plano superconductor. Utilizando el método de las imágenes, las corrientes de superconducción son generadas en el superconductor las cuales generan un campo magnético equivalente al de un dipolo magnético igual al primero, como si estuviese este nuevo dipolo equivalente situado a una distancia $-z$ y orientado formando un ángulo con respecto al eje z de $\pi - \theta$ es decir, como si fuese una imagen especular del primer dipolo magnético. La densidad de flujo magnético generada por el dipolo imagen en la posición del primer dipolo es:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3 m \cos(\theta) \vec{k} - \vec{m}}{(2z)^3} \right]$$

en unidades MKS, donde \vec{k} es el vector unitario en la dirección $+z$ y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

Por lo tanto, la energía del sistema puede ser escrita como:

$$U(z, \theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{32\pi} m^2 \frac{1 + \cos^2(\theta)}{z^3}$$

Y la fuerza según el eje z que empuja (sentido $+z$) F_z así como el momento N_θ (componente de orientación $\vec{k} \times \vec{m}$) pueden ser deducidas como:

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 3 \frac{\mu_0}{32\pi} m^2 \frac{1 + \cos^2(\theta)}{z^4}$$

Y

$$N_{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{32\pi} m^2 \frac{\sin(2\theta)}{z^3}$$

Respectivamente, estando ambas expresadas en unidades MKS.

Estos son exactamente los resultados que se obtiene integrando la ecuación 6 (6)

para el plano completo:

$$F_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{dS} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 4 \mu_0 (n_s \times H^{ap}) \times H^{ap} dx dy$$

$$N_{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{r} \times \frac{dF}{dS} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 4 \mu_0 \vec{r} \times ((n_s \times H^{ap}) \times H^{ap}) dx dy$$

con

$$H^{ap} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

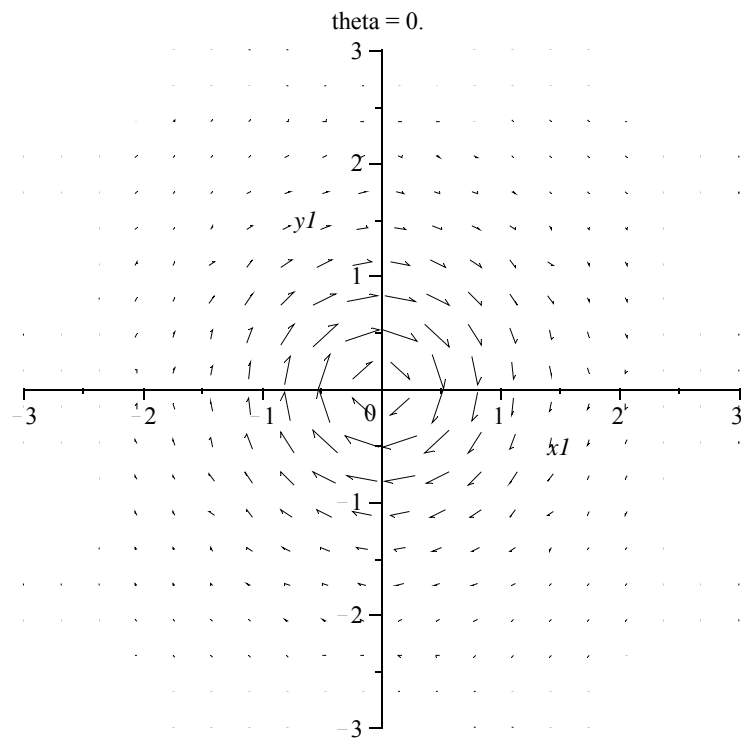
y

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$$

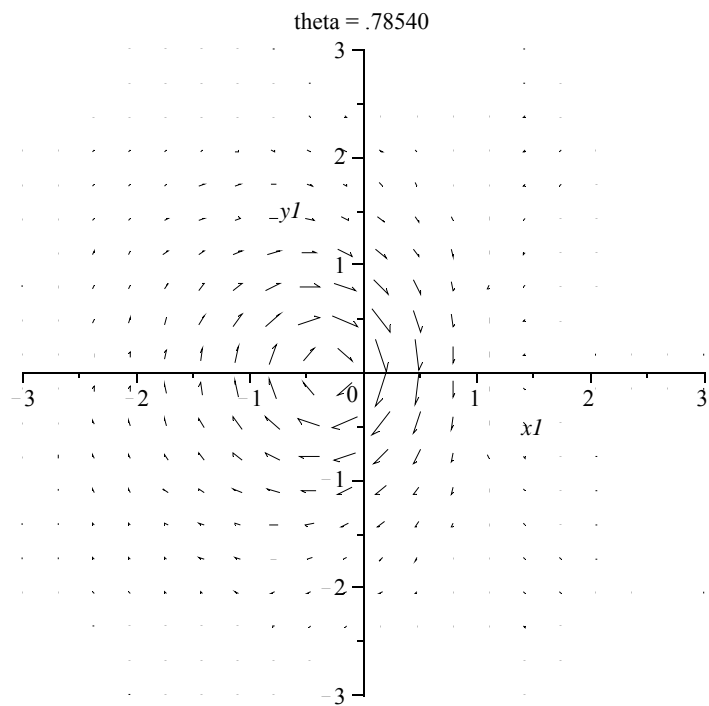
Donde \vec{i} y \vec{j} son los vectores unitarios en el plano que define la superficie del superconductor, es decir definiendo los ejes x e y respectivamente.

Empleando la ecuación [5] encontramos la densidad de corriente generada por la presencia del imán. En las siguientes figuras representamos la densidad de corriente superficial en el plano cuando un imán esta en x=0, y=0, z=1 (unidades arbitrarias) con

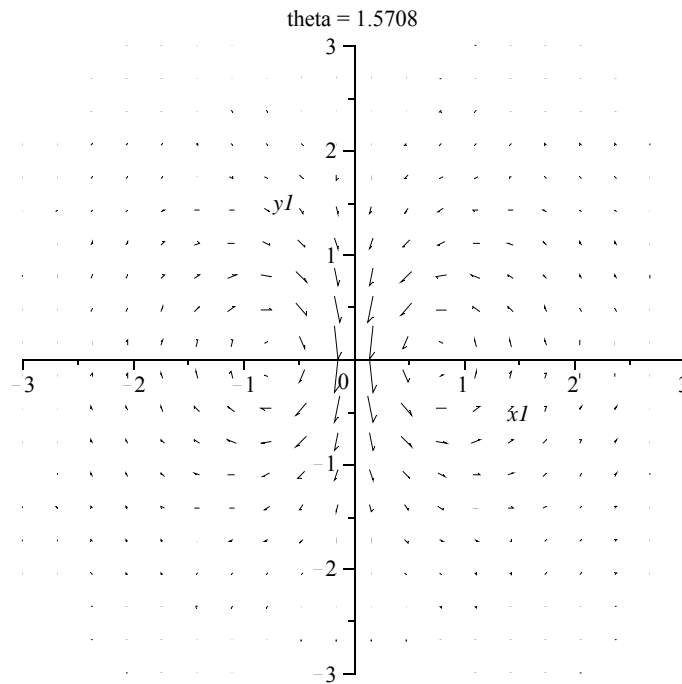
$$\theta = 0, \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{\pi}{2} \text{ respectivamente.}$$



Densidad de corriente superficial para theta=0.



Densidad de corriente superficial para theta=45°



Densidad de corriente superficial para $\theta=90^\circ$

Con este estudio se consigue demostrar la validez del modelo universal propuesta por PD-GP y que permite describir la mecánica del sistema superconductor/imán permanente existiendo únicamente hasta la fecha modelos concretos como el método de las imágenes que tiene limitado su poder de resolución a unos pocos casos de configuraciones geométricas.

Se han deducido; una expresión local y exacta para la densidad de corriente superficial [5] y la fuerza por unidad de superficie [6] generada sobre un superconductor por un campo magnético próximo a él, empleando únicamente ecuaciones de Maxwell y de London para su obtención.

Ambas expresiones son validas para cualquier clase de forma y tamaño del superconductor, dependiendo únicamente estas del campo magnético aplicado, es decir como si no hubiese superconductor.

Por lo tanto, estas expresiones son una herramienta muy útil para el diseño de dispositivos de levitación de cualquier forma, no estando limitado a únicamente casos que presenten simetría los cuales son los únicos que pueden ser resueltos por el método de las imágenes.

En el caso de un plano infinito, las ecuaciones [5] y [6] propuestas en el presente trabajo, conducen a los mismos resultados tanto para la fuerza como para el momento que se hubiesen obtenido por el método de las imágenes.

5. APLICACION CASO DE CILINDRO SUPERCONDUCTOR

En este capítulo mostramos los resultados de aplicar la expresión PDGP al caso de un cilindro superconductor y un imán permanente.

El cilindro vendrá caracterizado por su longitud L , radio interior R_i y radio exterior R_e , siendo el eje z de coordenadas el propio eje del cilindro que además estará centrado en $z=0$. El imán permanente vendrá caracterizado por su momento magnético total m que tomaremos concentrado en un solo punto y por la orientación del mismo.

Consideramos en primer lugar la disposición con simetría cilíndrica, esto es, con el imán en una posición sobre el eje x , orientado en el plano axial zx y formando un ángulo α con el eje z .

El campo magnético generado por el imán en un punto en una posición r se calcula empleando la expresión ya citada anteriormente ^[Jackson]:

$$\overline{H}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \overline{m}) - \overline{m}}{r^3}$$

$$\hat{n} = \frac{\overline{r}}{r}, \text{ con } r = |\overline{r}|$$

Donde en este caso r será el vector que tenga su origen en la posición del imán y su extremo en el elemento de superficie de superconductor.

La fuerza ejercida por el imán sobre el cilindro se calcula así sumando cuatro componentes: la resultante de integrar las contribuciones de la superficie interior del cilindro con su normal dirigida radialmente hacia el interior del mismo, la resultante de integrar las contribuciones de la superficie exterior con la normal radialmente hacia el exterior y las dos contribuciones de los extremos del cilindro –coronas circulares con

radios R_{int} y R_{ext} - con la normal a la superficie dirigida en la dirección del eje z y sentido siempre hacia el exterior del cilindro.

Se calculan siempre las tres componentes de la fuerza, incluso cuando la simetría del problema determina que alguna componente debe ser nula. Estas componentes se emplean para comprobar la convergencia y precisión de los métodos numéricos empleados para la integración.

La integración en las superficies se plantea de forma analítica y es el programa MAPLE v11 que realiza la integración numérica bidimensional.

En los cálculos que se muestran a continuación se han tomado los siguientes valores numéricos:

Momento magnético $m=1,064$ [A.m²]

Correspondientes a un imán cilíndrico de Nd con Imanación $M=0,831$ [T], diámetro=12,7 [mm] y altura=12,7 [mm] que ya hemos empleado anteriormente.

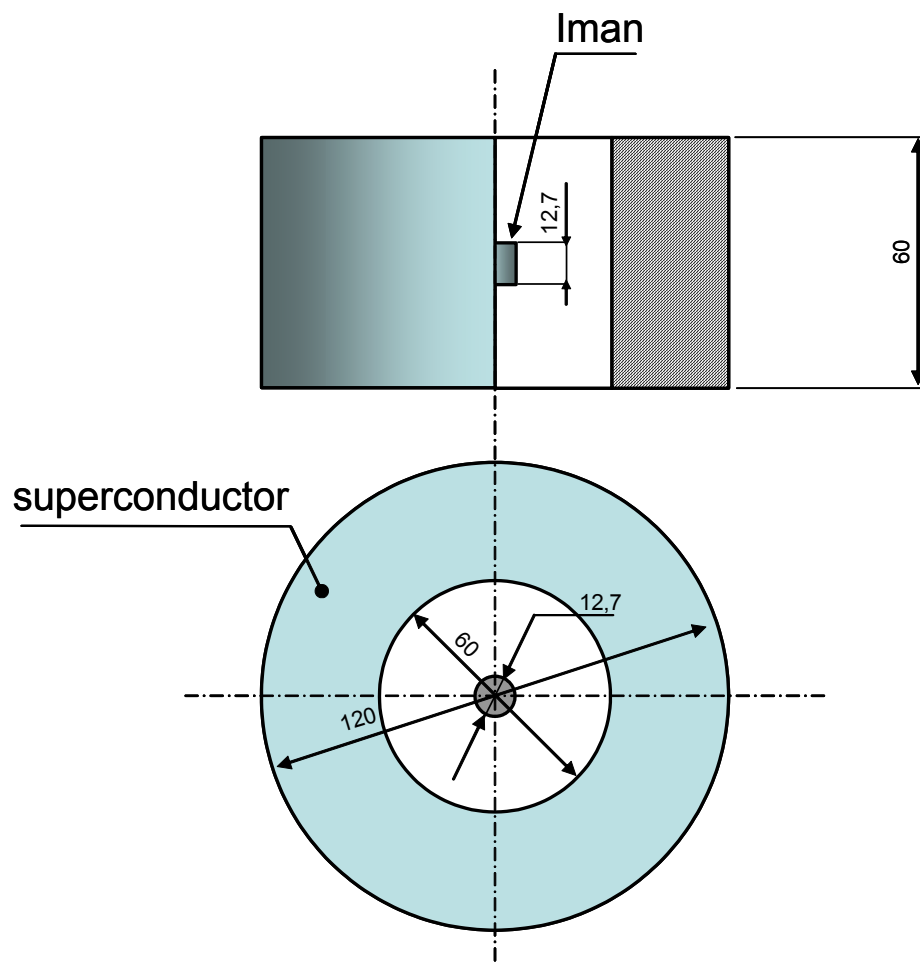
Téngase en cuenta que la fuerza que resultada es proporcional al cuadrado del momento magnético (m^2) por lo que es fácil emplear estos resultados para cualquier otro momento magnético.

El cilindro superconductor será:

$$R_i = 30 \text{ mm}$$

$$R_{ext} = 60 \text{ mm}$$

$$L = 60 \text{ mm}$$



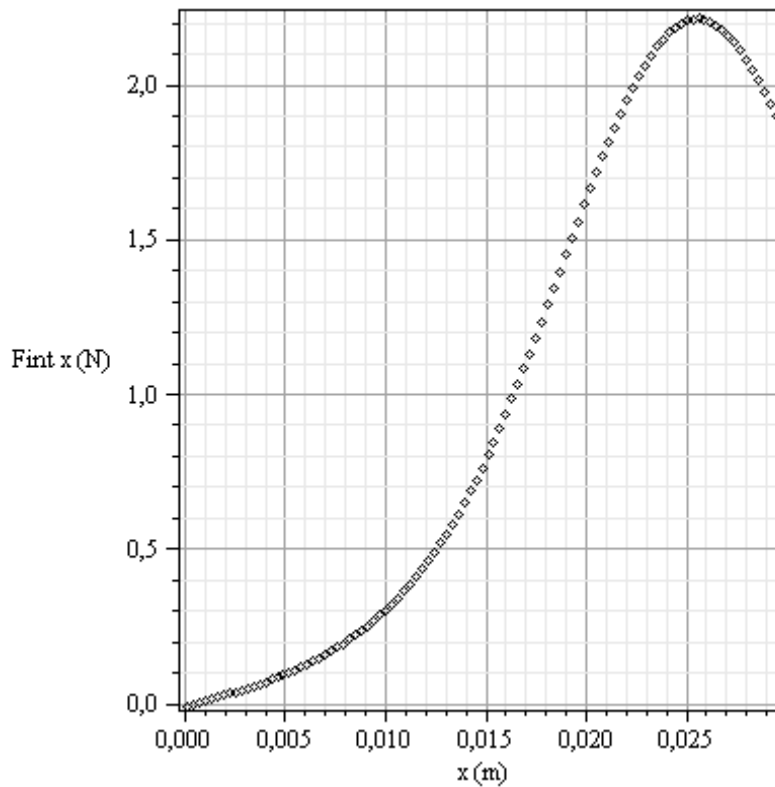
Nótese que la fuerza que se calcula en este capítulo es la que ejerce el imán sobre el superconductor. La que ejerce el superconductor sobre el imán es la opuesta (misma magnitud y dirección pero sentido opuesto).

De la misma manera los pares de fuerzas calculados son los ejercidos por el imán sobre el superconductor. Los ejercidos por el superconductor sobre el imán son opuestos.

5.1. Caso 1

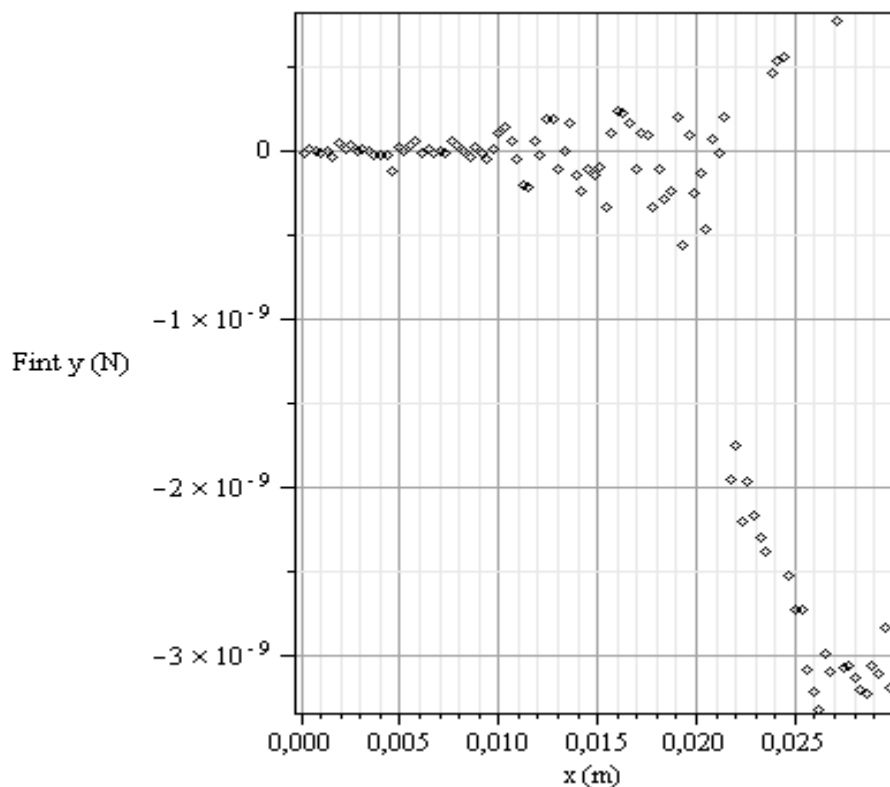
Imán orientado axialmente ($\alpha=0$) que movemos radialmente desde el centro del cilindro hasta la pared interior.

En la figura siguiente se muestra la contribución de la superficie interior a la componente radial (eje x) cuando desplazamos el imán desde el eje radialmente (siguiendo el eje x).

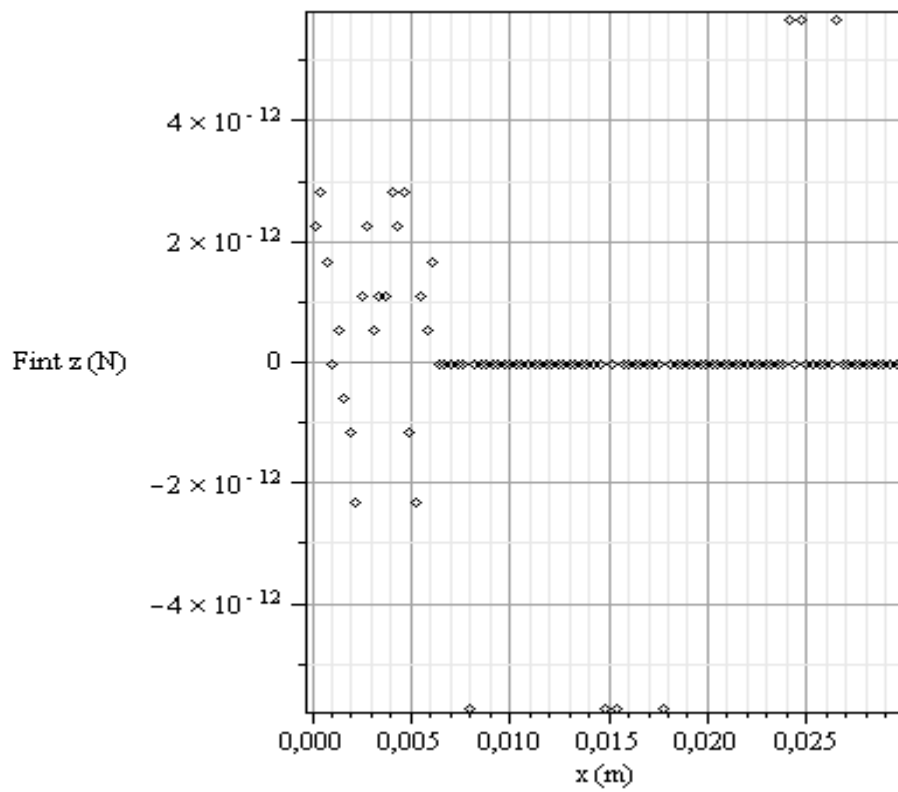


Podemos destacar que la contribución de la superficie cilíndrica interior es por consiguiente estable. Una fuerza positiva del imán sobre el cilindro es restauradora, es decir, la fuerza que experimenta el imán está dirigida hacia el origen (eje). Tiene la peculiaridad de tener un máximo cerca ya de la pared interior.

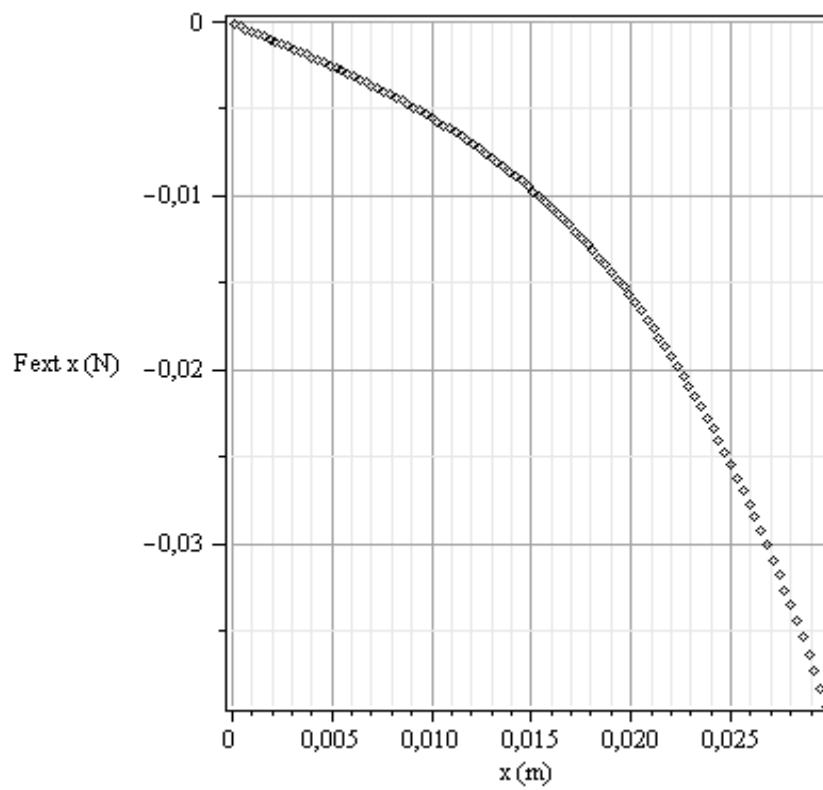
La siguiente figura muestra la componente “y” de la fuerza ejercida sobre la superficie interior. Por simetría esta fuerza debe ser nula y el resultado que obtenemos es una comprobación más de la precisión de nuestro cálculo. Siendo que todos los valores son inferiores a 4 nN podemos afirmar que nuestra precisión de cálculo es cuanto menos de 10^{-9} .



De igual forma sucede con la componente axial (eje z) que se muestra en la figura siguiente. Aunque en este caso aún tenemos tres órdenes de magnitud más de precisión.

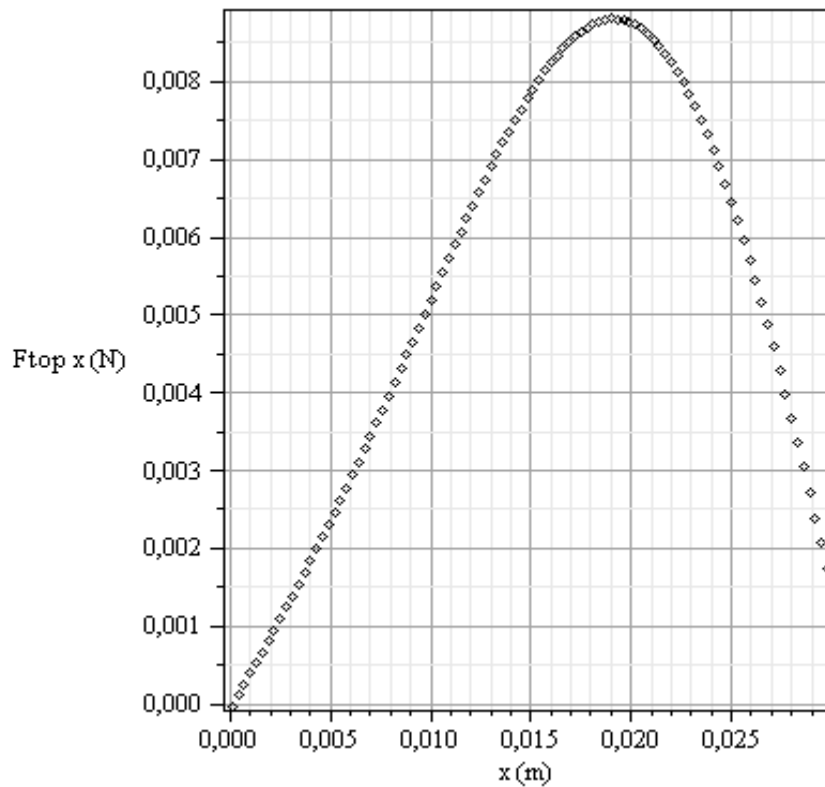


La contribución de la superficie cilíndrica exterior es de signo opuesto a la interior –de menor magnitud- y no presenta ningún extremo como puede verse en la figura siguiente:



Tanto la componente transversal F_{exty} como la componente axial F_{extz} son nulas con una precisión mejor de 10^{-11} .

La componente radial de la contribución del borde en $z=+L/2$ es la siguiente:

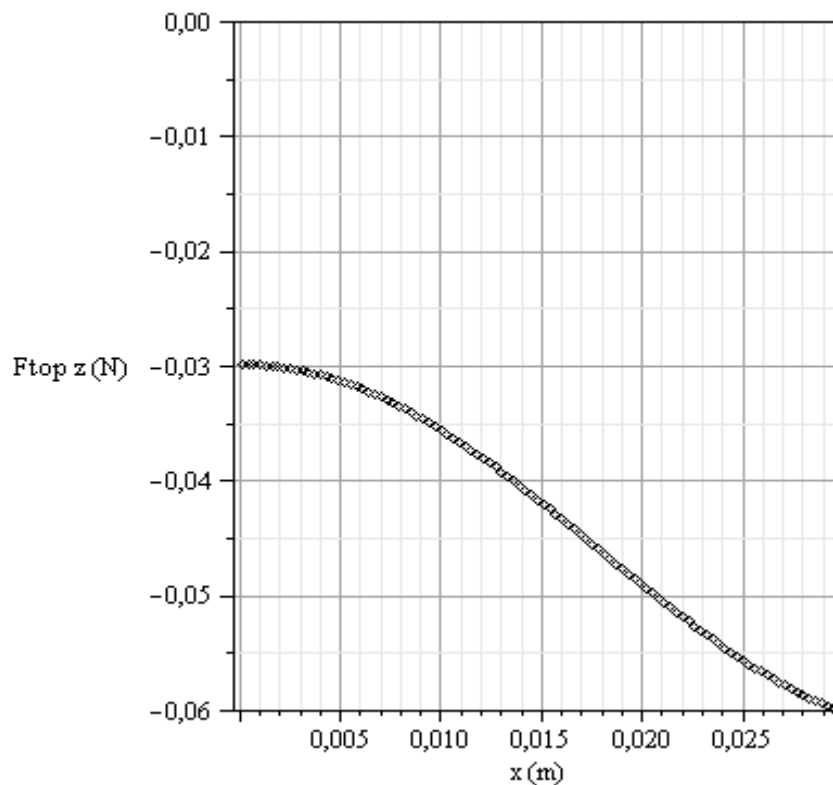


Nótese que el sentido es, al igual que en el caso de la superficie cilíndrica interior, restaurador o estable. Esto es positivo sobre el cilindro, negativo sobre el imán.

La componente radial del borde en $z=-L/2$ es igual a la componente radial del borde en $z=+L/2$. Esto significa además que el par de fuerzas, que podría actuar sobre el imán desviándolo de su orientación axial, es nulo.

La componente transversal en el eje y de la contribución de los bordes es inferior en todos los casos a 10^{-10} .

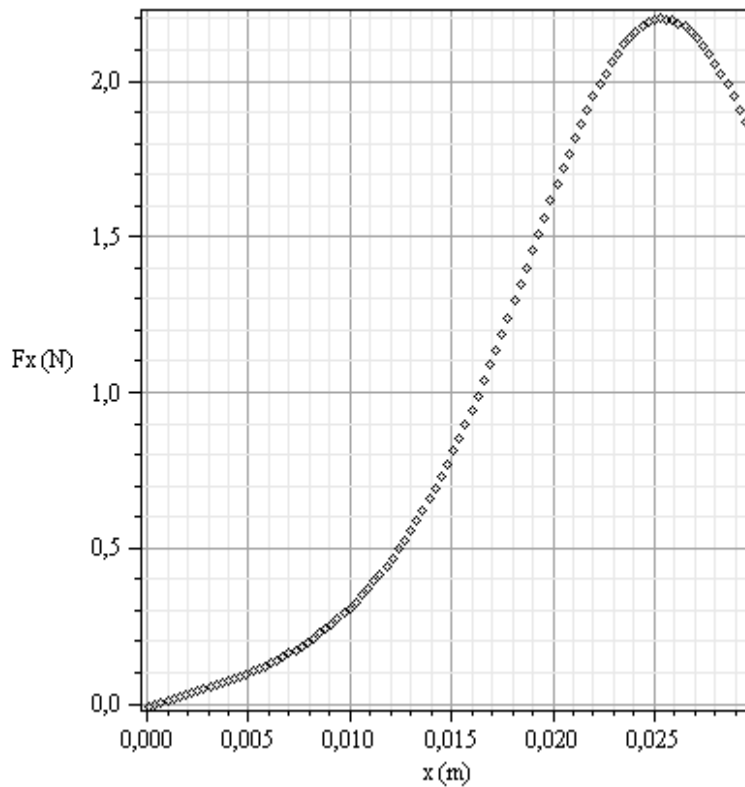
La contribución del borde en $z=+L/2$ a la componente z es la que se muestra en la figura siguiente.



El sentido de esta contribución es atractivo. Esto es el imán ejerce una fuerza de signo negativo en el eje z sobre el borde.

La contribución del borde en $z=-L/2$ es justamente la opuesta. Esto significa que el plano central es de esta forma un punto inestable. Con resultante de la fuerza nula en el eje z pero por compensación de las fuerzas atractivas de los extremos. En nuestro caso la compensación es exacta con una precisión de 10^{-12} .

Para terminar este caso mostramos en la siguiente figura la fuerza radial resultante de la contribución de las cuatro superficies mencionadas: interior, exterior y bordes superior e inferior.



Esto significa que un imán orientado axialmente en el interior de un cilindro superconductor experimenta una fuerza radial restauradora cuando se separa del eje. Como se ve el primer tramo es lineal (hasta 5 mm en nuestro caso concreto) pero luego tiene una fuerte no linealidad mostrando incluso un máximo de la fuerza entre 25 y 26 mm.

Siendo además la fuerza axial nula aunque inestable por el efecto de los bordes, podríamos pensar en que un imán injertado en un eje diamagnético (por ejemplo de aluminio) puede servir de cojinete sin contacto. La inestabilidad axial debe compensarse en este caso por el empleo de otro cojinete que soporte este tipo de esfuerzos que vaya a recibir el eje en cuestión.

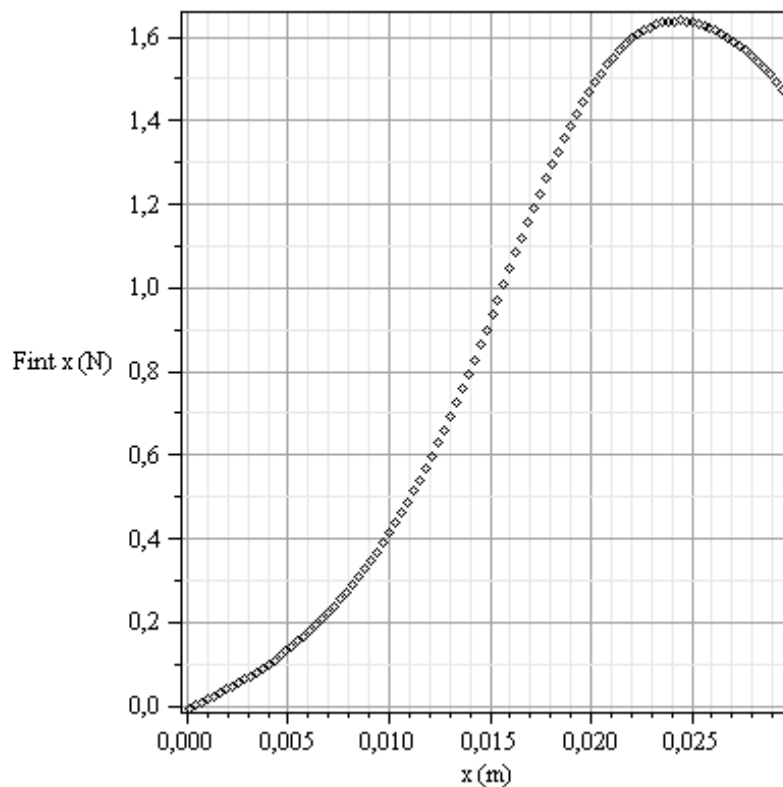
Los pares de fuerzas pueden ser también calculados mediante la expresión PDGP. En el caso que abordamos se obtienen valores nulos para las tres componentes con un error de 10^{-12} , 10^{-11} y $2 \cdot 10^{-10}$ N·m.

Los valores numéricos que hemos empleado son factibles y corresponden a los que tendríamos un imán de Neodimio comercial y un cilindro superconductor que también puede encontrarse con relativa facilidad. Aunque la magnitud de la fuerza es pequeña en comparación con otro tipo de cojinetes, es suficiente para aplicaciones de mecánica de precisión. Este tipo de dispositivo presenta además otras ventajas que pueden ser decisivas: especialmente la ausencia de contacto y de rozamientos o la ausencia de constricciones no admisibles para usos como estabilización de ejes flexibles.

5.2. Caso 2

Imán desviado ($\alpha=30^\circ$) que movemos radialmente desde el centro del cilindro hasta la pared interior.

La contribución de la fuerza radial (eje x) en función del desplazamiento radial es muy similar al caso del imán orientado axialmente como puede verse en la figura siguiente.

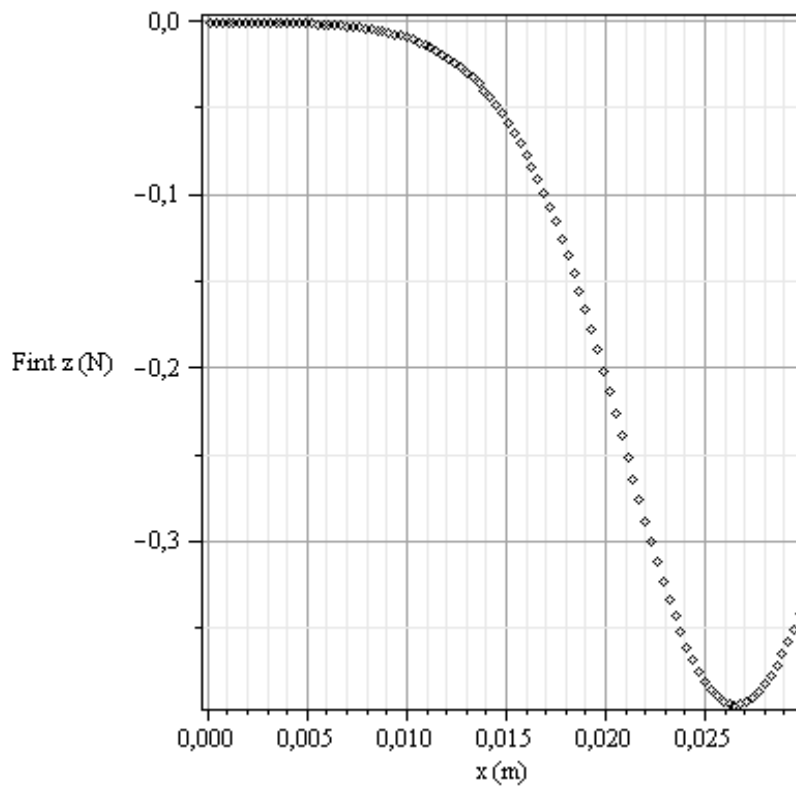


Se observa que el máximo de la fuerza radial se desplaza aproximadamente un milímetro hacia el origen.

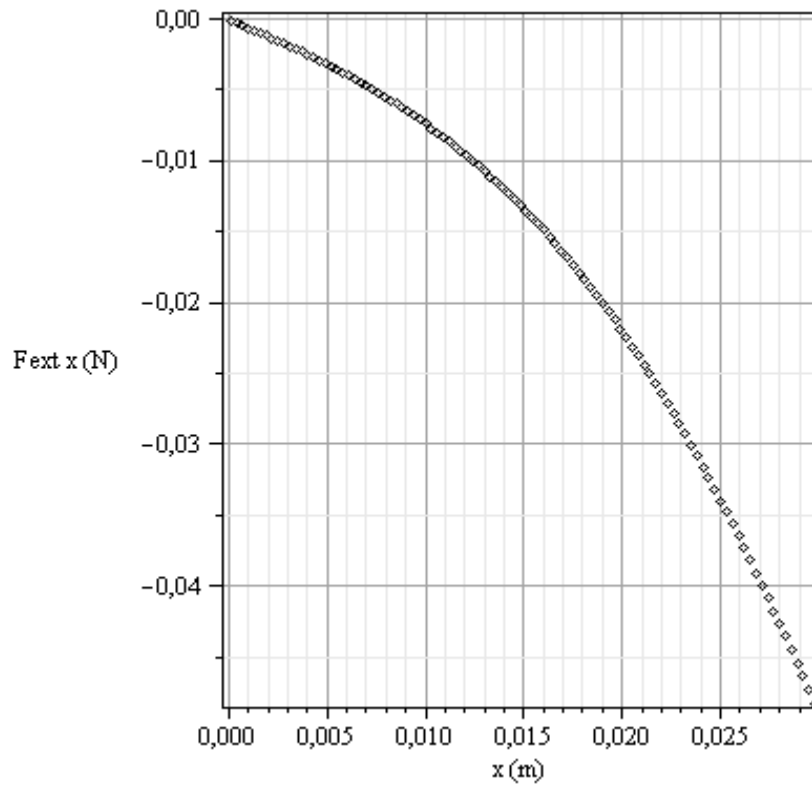
La magnitud de la fuerza es muy similar en el tramo primero lineal o incluso algo superior al del caso de orientación axial. Sin embargo los valores máximos son menores en cuarta parte aproximadamente.

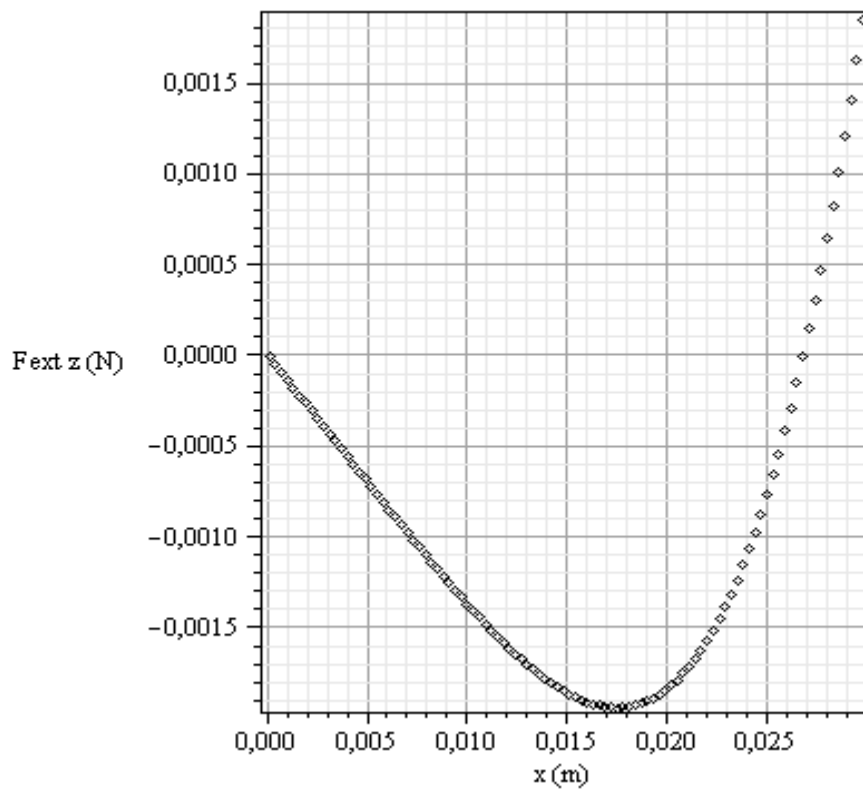
La componente transversal de la contribución de la superficie interior (Finty) es nula con un error de 10^{-10} .

La componente tercera (axial o en el eje z) de la contribución de la superficie interior, que se muestra en la siguiente figura, ya no es nula, sino que a partir de unos 5 mm de separación del eje comienza a crecer hasta alcanzar un máximo entre 26 y 27 mm



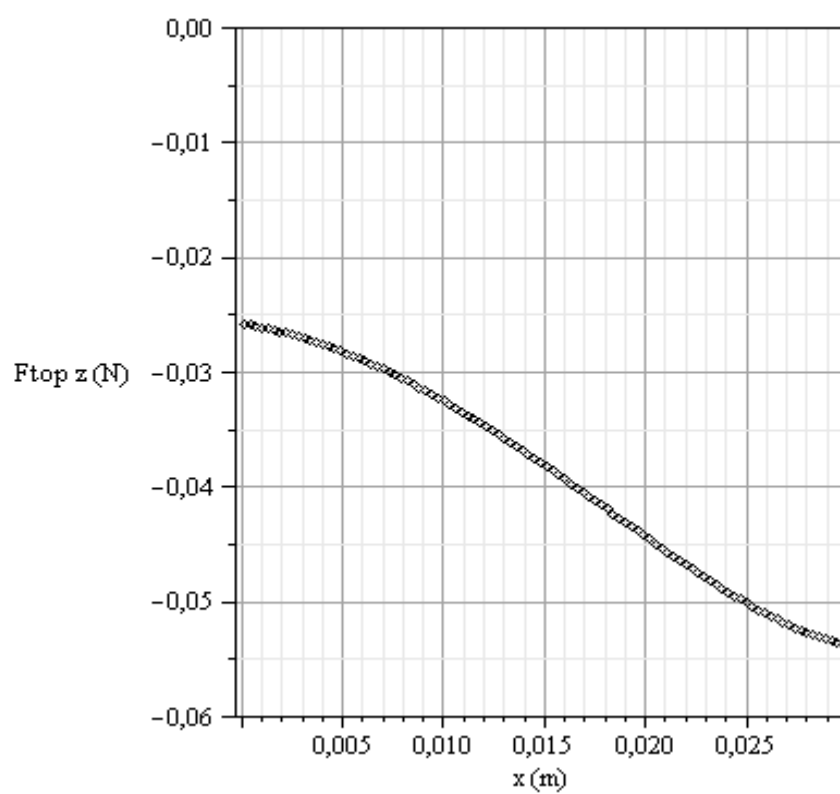
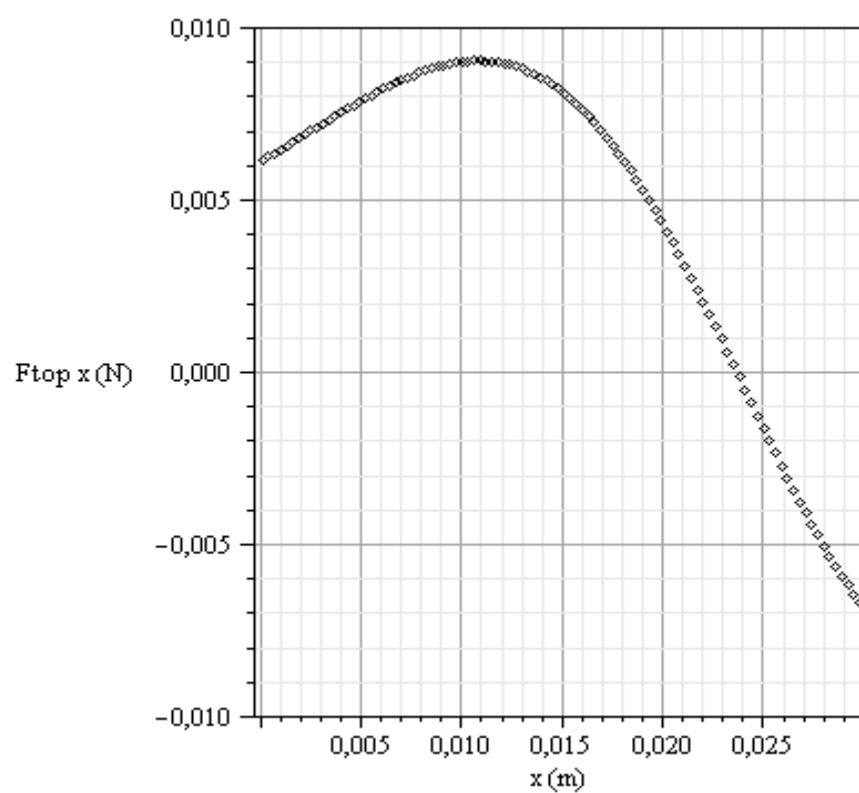
La contribución de la superficie cilíndrica exterior se muestra en las siguientes figuras para las componentes radial (x) y axial (z). Mientras que la componente transversal (y) es inferior a 10^{-10} .





La componente axial de la figura anterior presenta un cambio de signo cuando el imán se aparta del eje unos 27 mm.

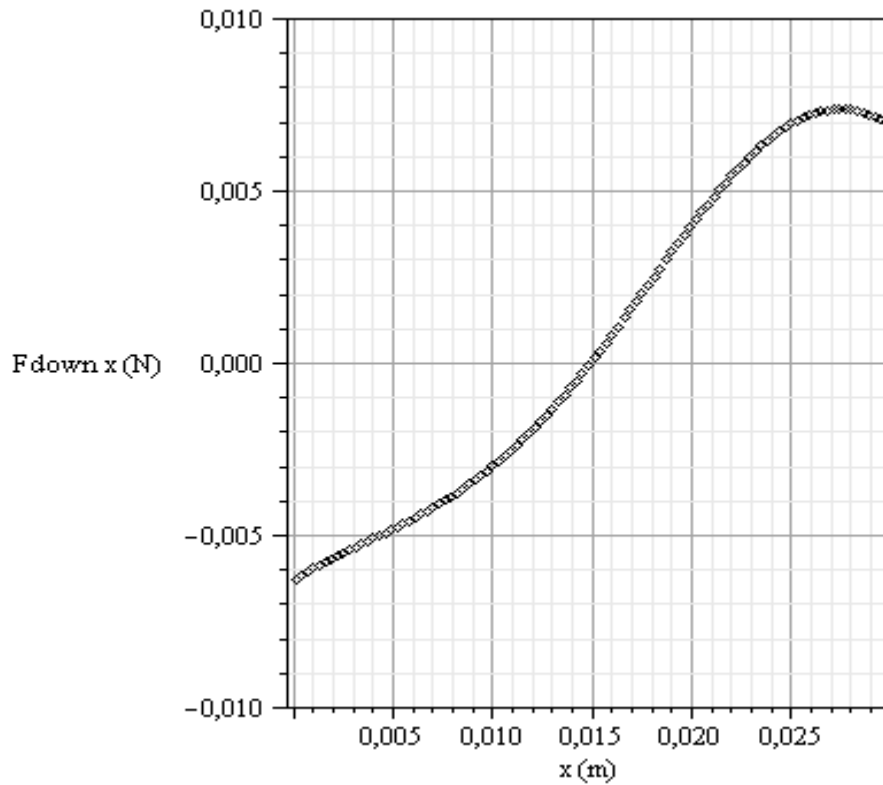
La contribución del borde en $z=+L/2$ –corona circular- a las componentes radial (x) y axial (z) se muestra en las figuras siguientes.



Observamos que la magnitud de esta última es menor que en el caso de orientación axial.

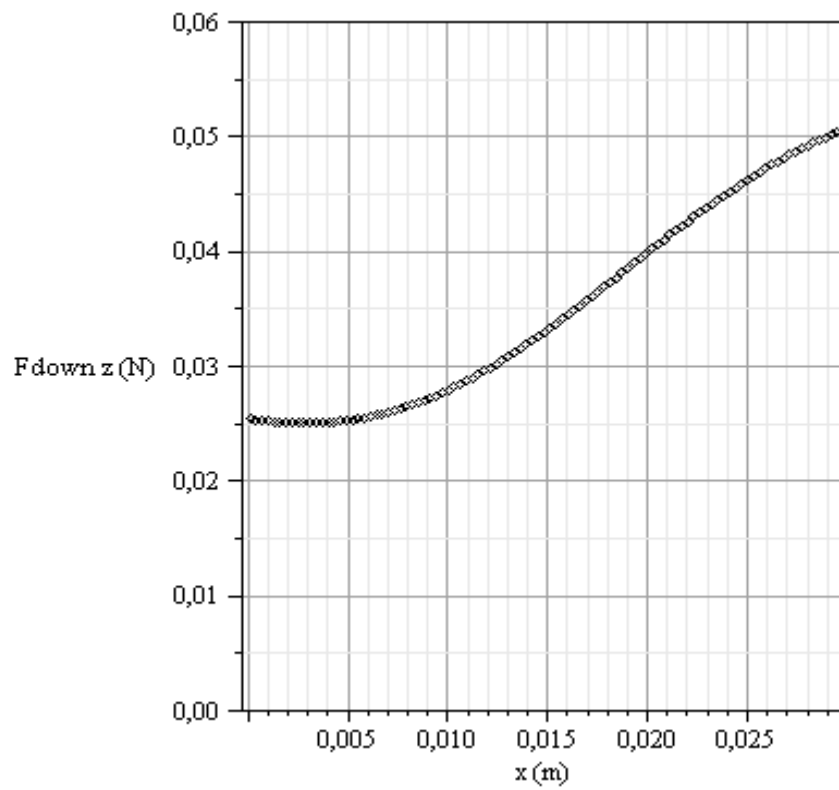
La componente transversal de la contribución del borde es inferior a 10^{-10} N.

La contribución del borde inferior ($z=-L/2$) se muestra en las figuras siguientes.

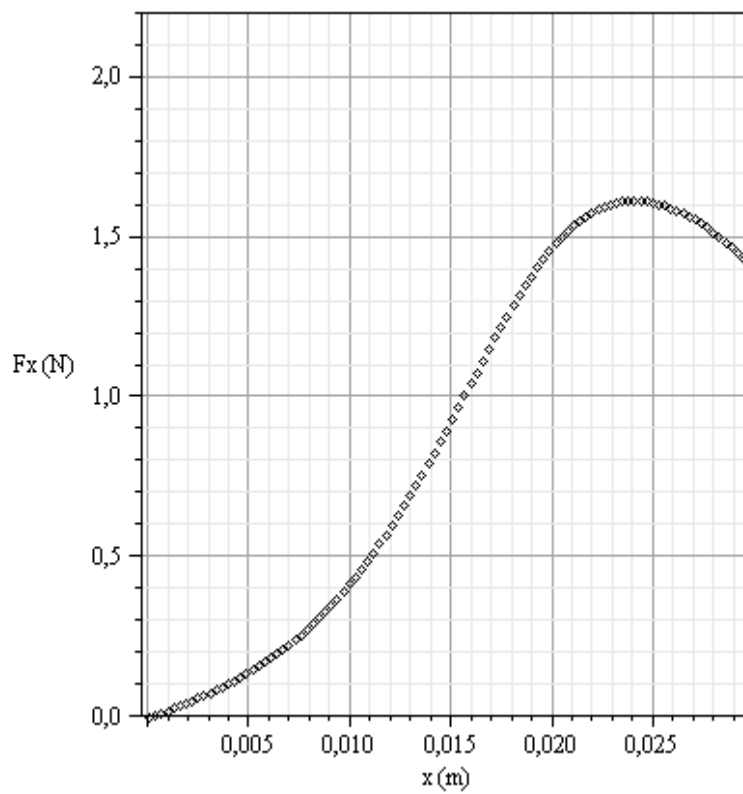


La componente radial (x) de la contribución del borde inferior es la opuesta de la contribución del borde superior para valores de desplazamiento de $-x$.

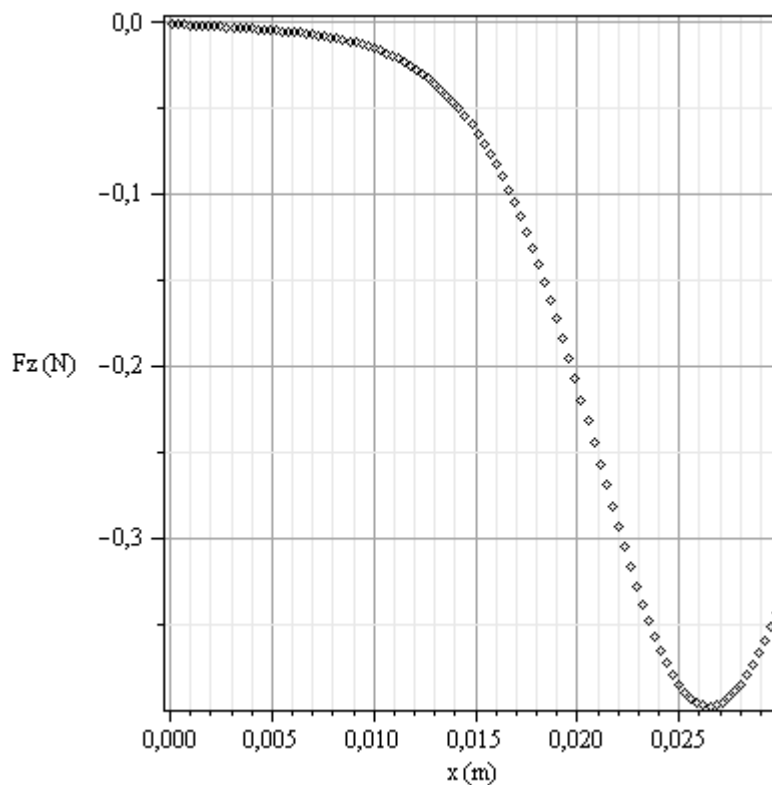
La componente axial de la contribución del borde inferior se muestra en la figura siguiente.



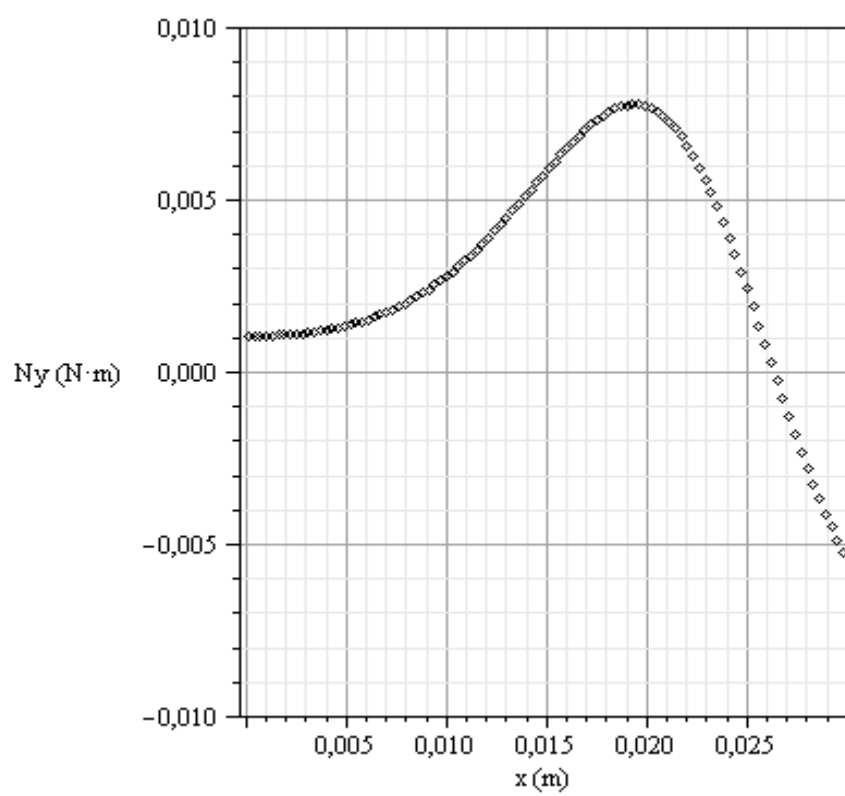
La componente radial total es la mostrada en la siguiente figura.



En este caso la componente transversal es menor que 10^{-10} N mientras que la componente axial (z) no es nula como puede verse en la figura siguiente.



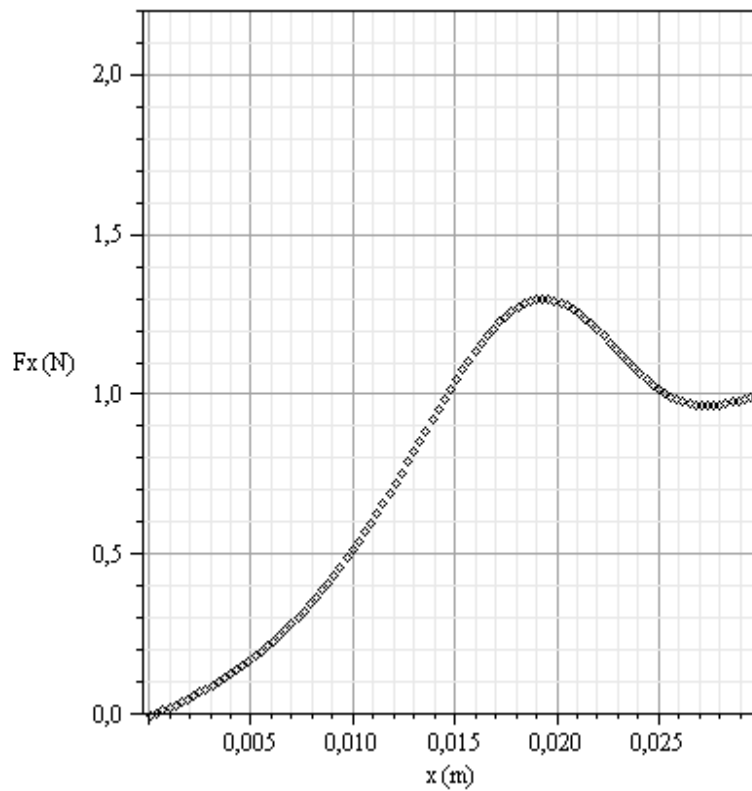
Las componentes radial y axial (N_x y N_z) eran menores de 10^{-10} N·m. La componente transversal del par de fuerzas resultante no es en este caso nula. El sentido es tal que tiende a orientar el cilindro axialmente con el imán si éste está en el origen o cercano a él como puede comprobarse en la figura siguiente. Sin embargo cambia el signo cuando se acerca finalmente a las proximidades de la pared (aproximadamente a 26 mm del eje).

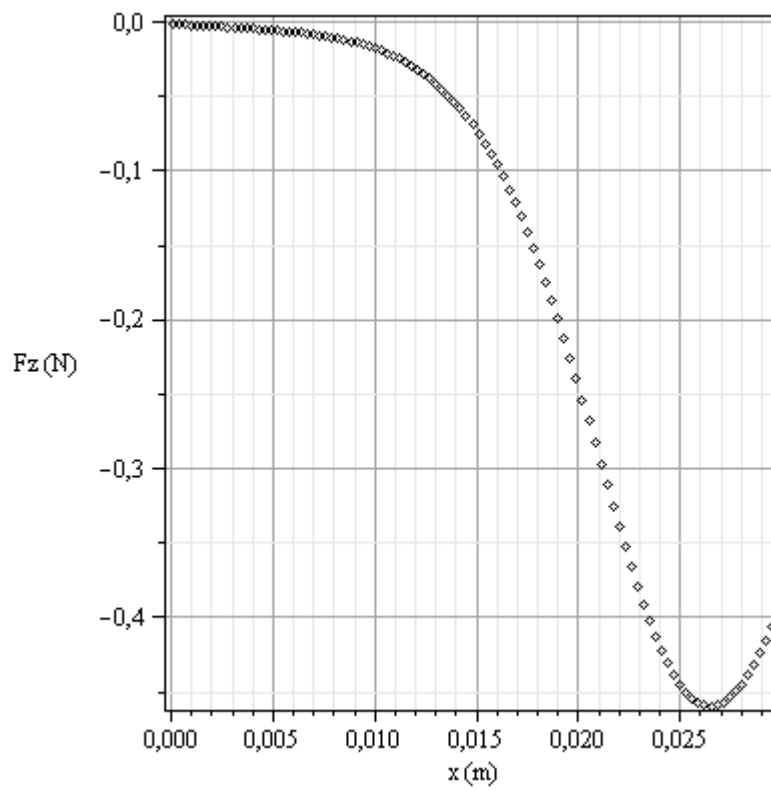


5.3. Caso 3

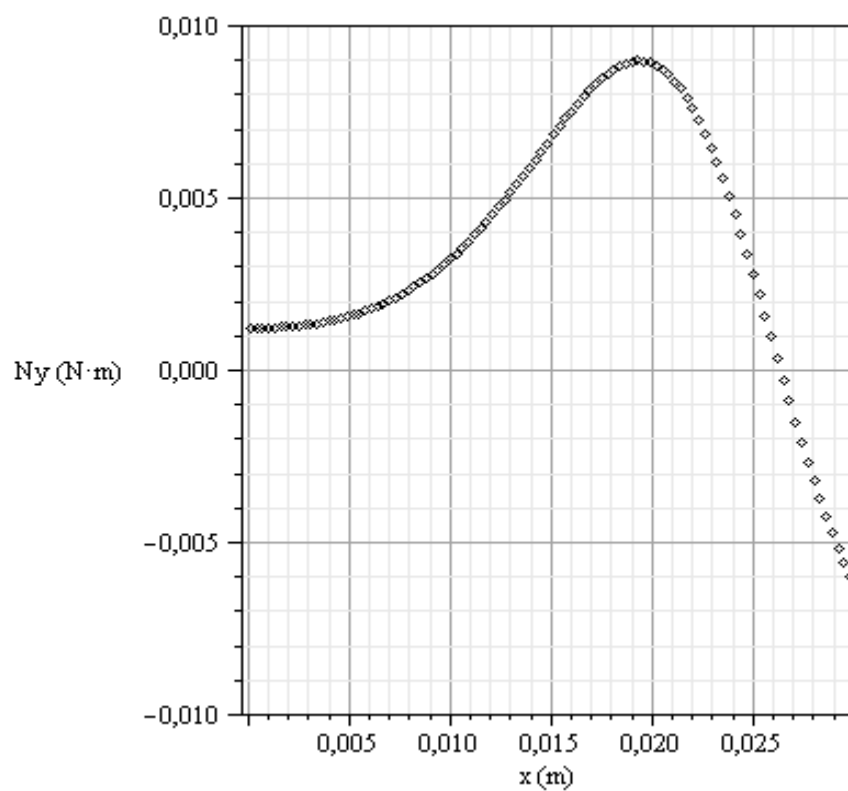
Imán desviado ($\alpha=45^\circ$) que movemos radialmente desde el centro del cilindro hasta la pared interior.

Mostramos solamente los resultados de la contribución total (de las cuatro superficies que componen el cilindro). La componente transversal de la fuerza es inferior a 10^{-10} N.



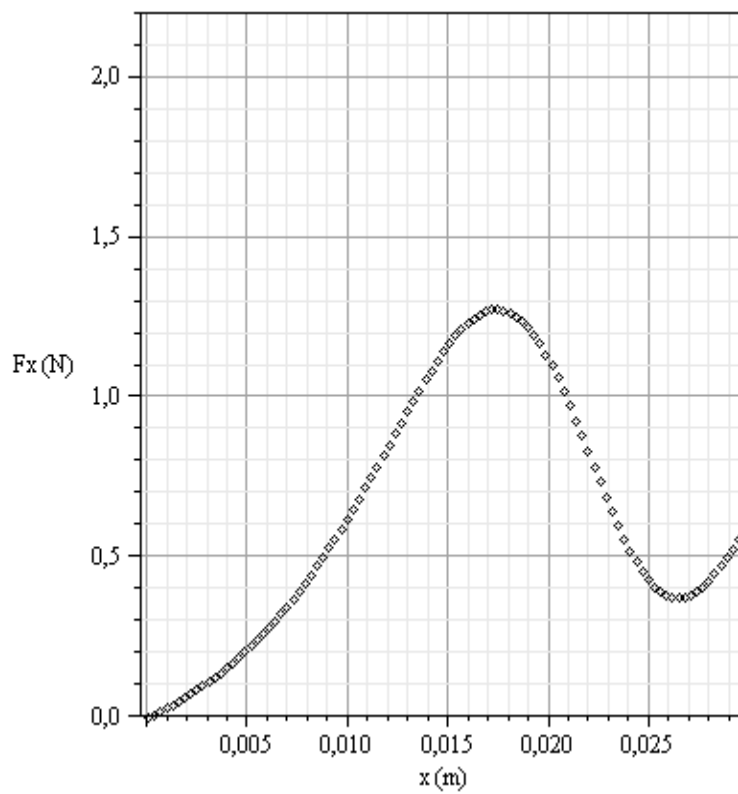


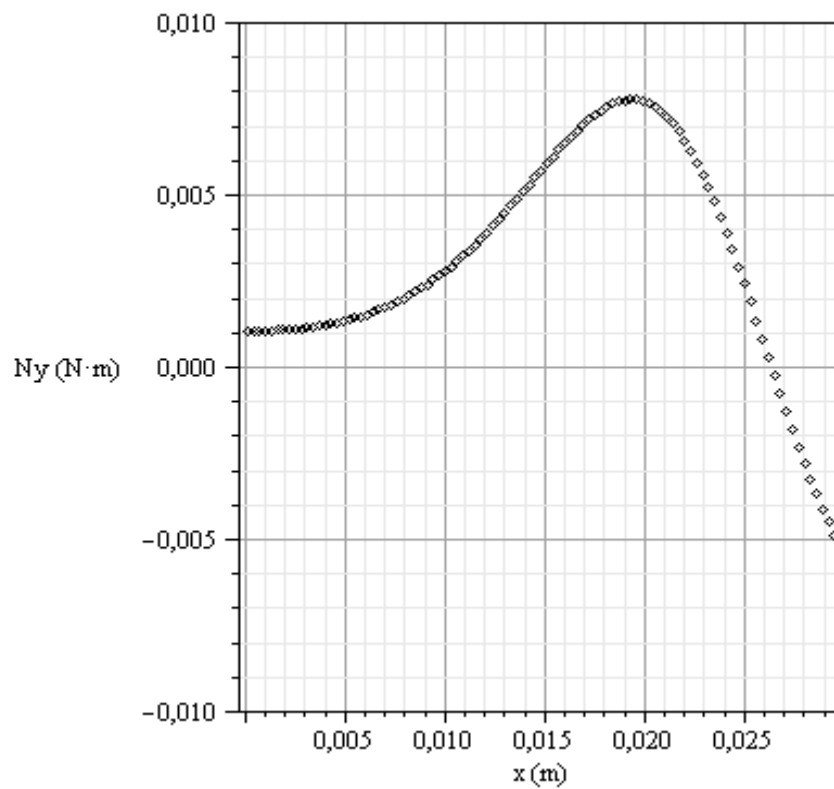
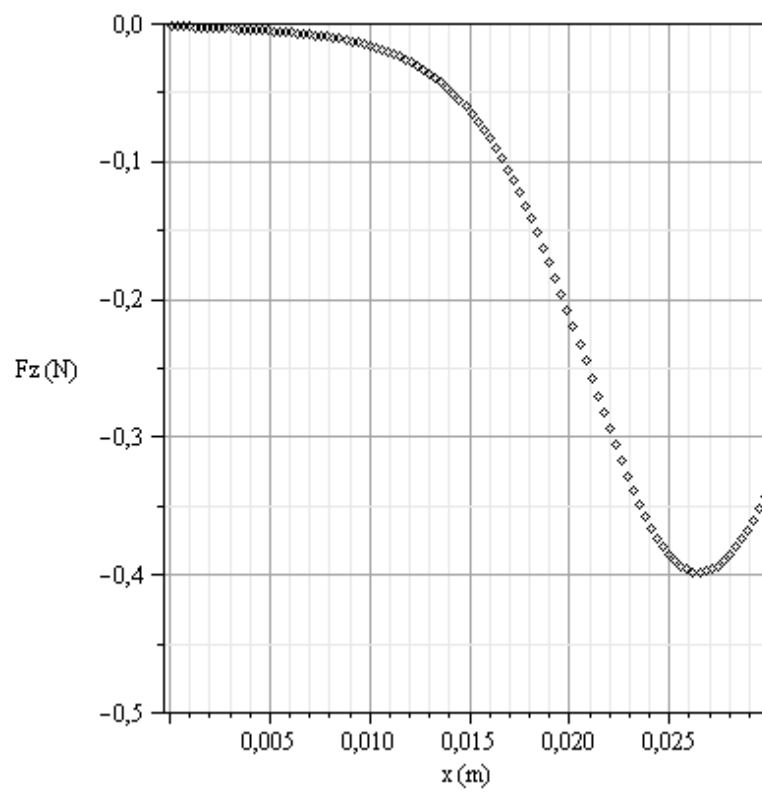
En cuanto a los pares de fuerzas, sus componentes radial N_x y axial N_z son menores de 10^{-10} N·m. La componente transversal se muestra en la siguiente figura.



5.4. Caso 4

Imán desviado ($\alpha=60^\circ$) que movemos radialmente desde el centro del cilindro hasta la pared interior.



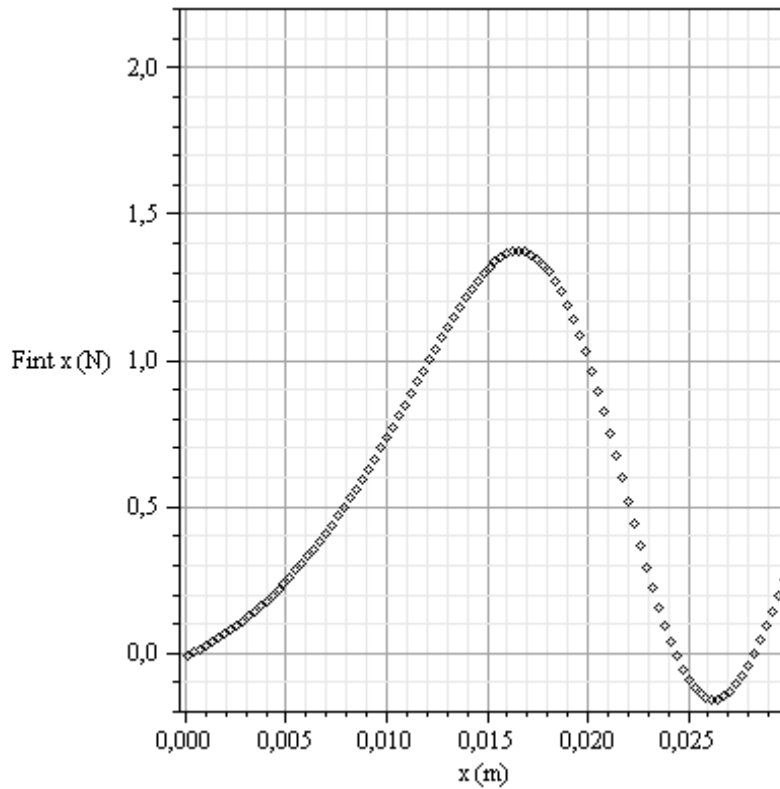


Las componentes N_x y N_z son en este caso inferiores ambas a 10^{-10} N·m.

5.5. Caso 5

Imán orientado radialmente ($\alpha=90^\circ$) que movemos desde el centro del cilindro hasta la pared interior.

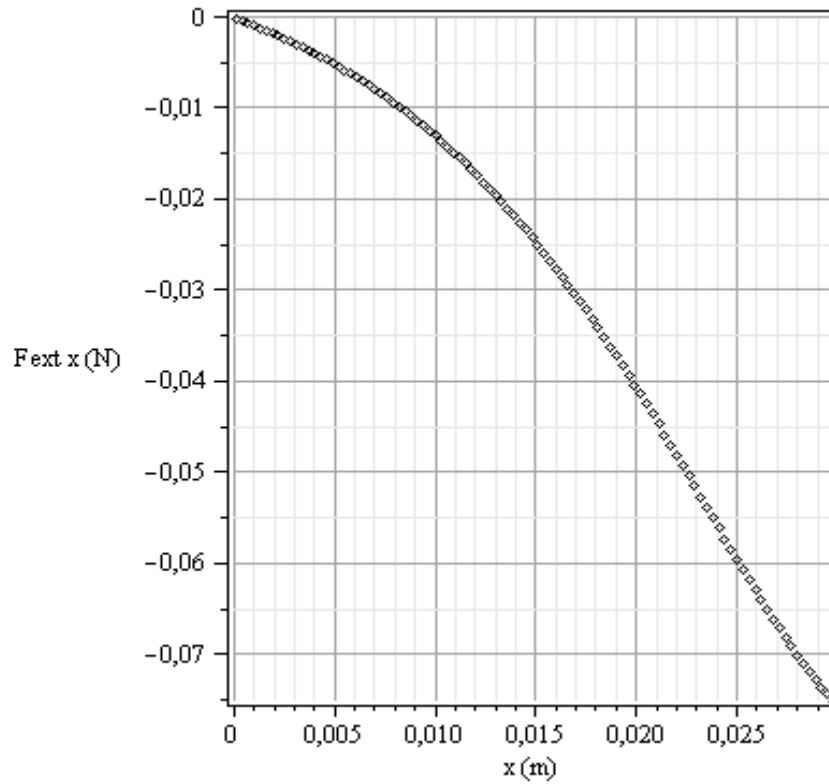
En este caso mostraremos primero las contribuciones de las diferentes superficies del cilindro superconductor con la misma notación empleada hasta ahora.



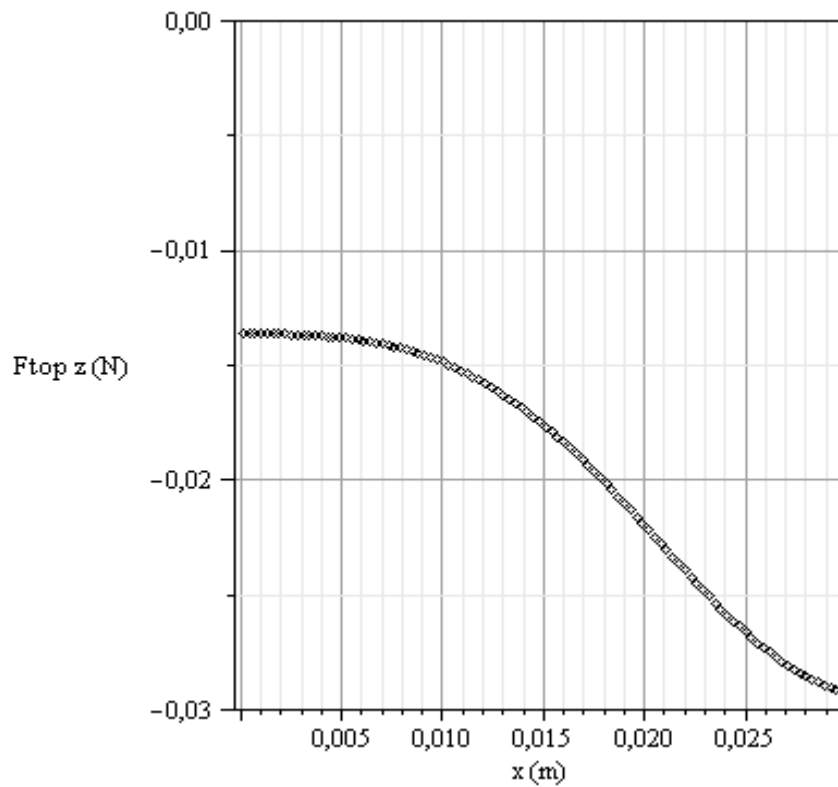
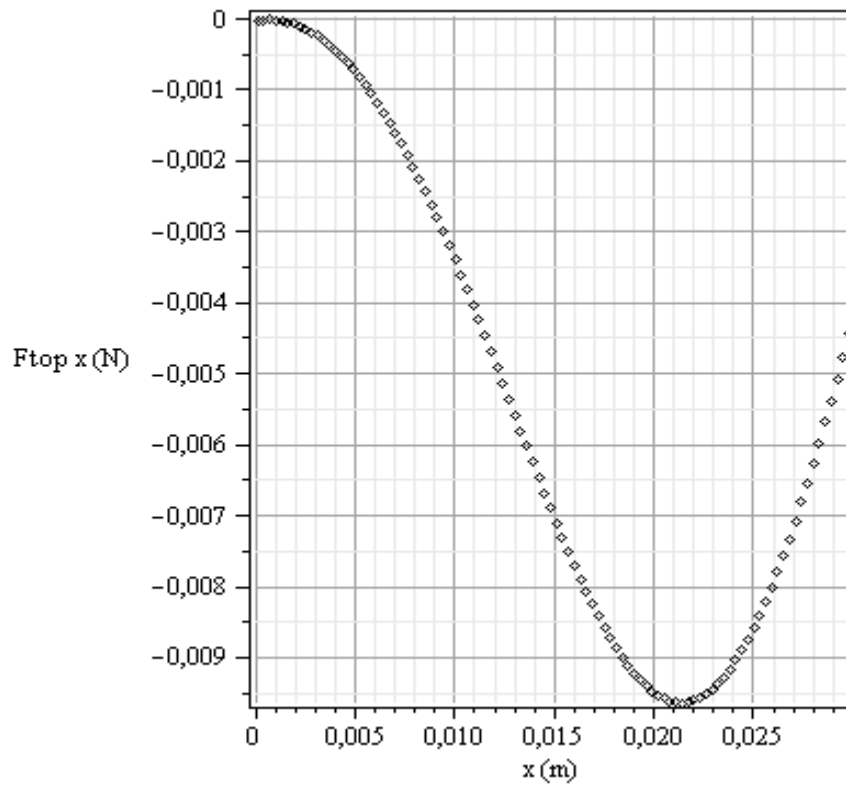
Como puede verse en la figura anterior la contribución de la superficie interior del cilindro es ahora más complicada.

Las contribuciones a las componentes transversal (eje y) y axial (eje z) son menores de 10^{-8} y 10^{-10} N respectivamente.

La contribución de la superficie exterior es un orden de magnitud menor y con una variación más simple como puede verse en la figura siguiente.



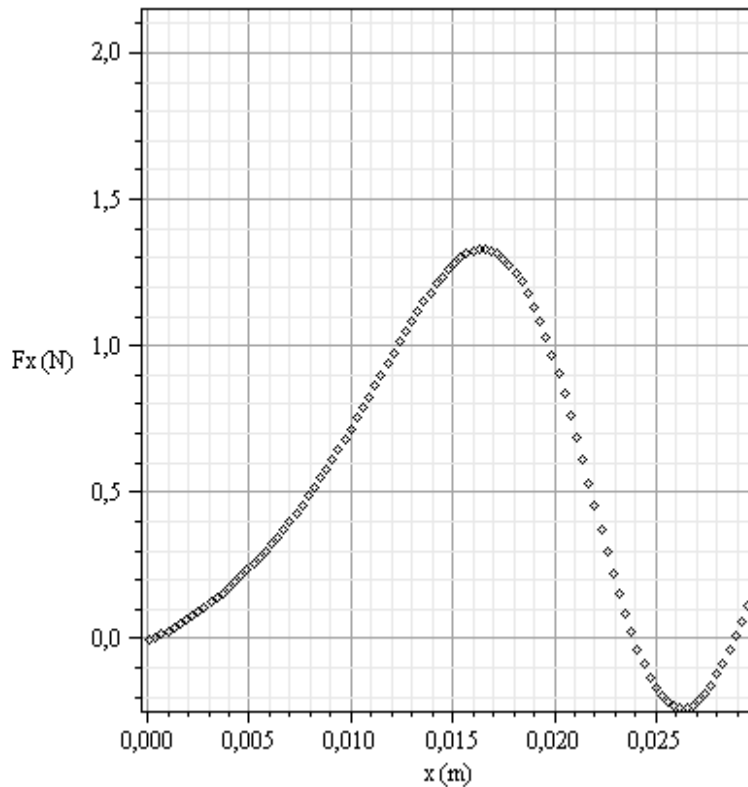
Por otro lado la contribución de los bordes aparece tanto en la componente radial -aún un orden de magnitud menor- como en la axial.



Nótese que el sentido de la fuerza radial es inestabilizador del eje –aunque su pequeña magnitud no puede llegar a contrarrestar a la contribución principal de la

superficie interior. El sentido de la componente axial es atractivo por lo que cada extremo atrae al imán.

Las resultantes de las contribuciones de todas las superficies se muestran en las figuras siguientes:



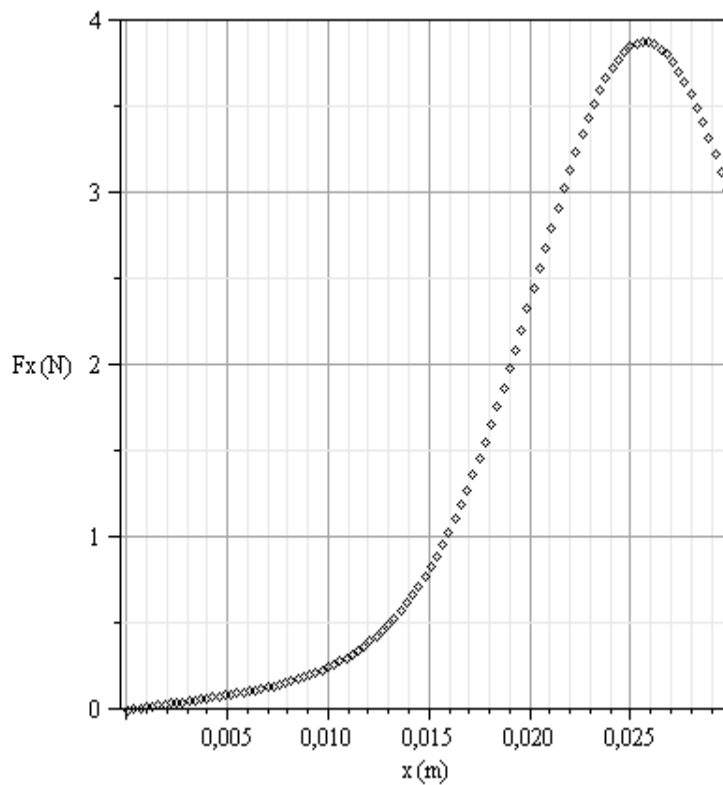
Puede comprobarse que sigue siendo un punto de equilibrio estable la posición central, pero además aparecen otros dos puntos de equilibrio: uno entre 24 y 25 mm inestable y otro entre 28 y 29 mm.

El resto de componentes son menores que 10^{-8} N y 10^{-10} N.

Todos los pares de fuerzas son menores que 10^{-10} N·m. La orientación pues radial es de equilibrio inestable, puesto que para una pequeña desorientación aparecen pares de fuerzas que tienden a orientar axialmente al imán con el cilindro.

5.6. Caso 6

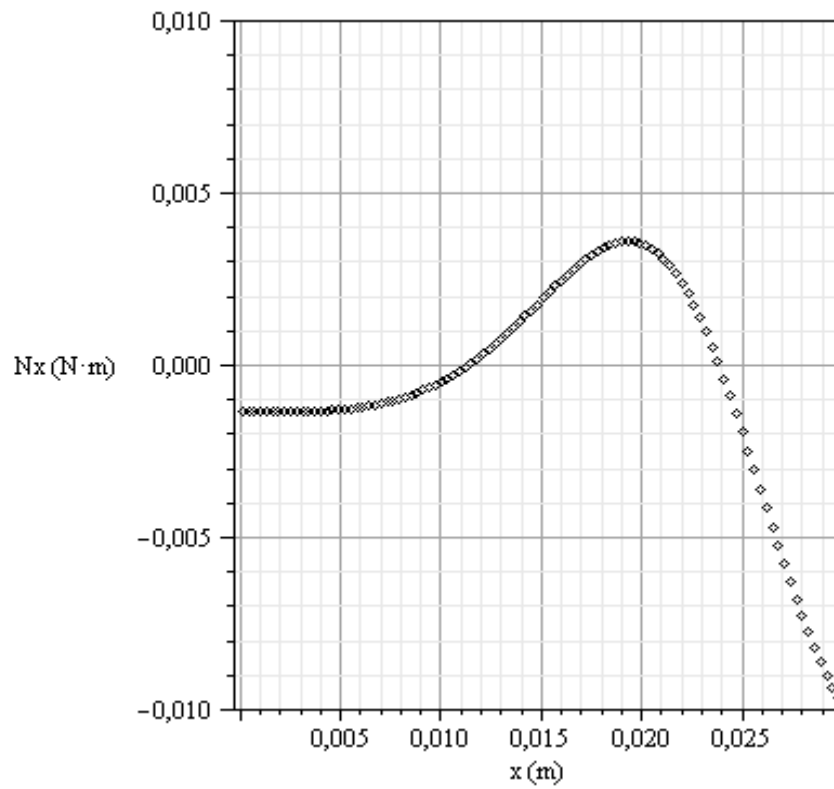
Imán fuera de plano axial ($\alpha=0^\circ$, $\beta=45^\circ$) que movemos desde el centro del cilindro hasta la pared interior.



Como puede comprobarse la magnitud es aproximadamente el doble que en el caso de orientación axial.

En cuanto a los pares de fuerzas encontramos un comportamiento interesante de su componente N_x que es la única no nula. Según nos desplazamos desde el eje el sentido del par es alineante –intenta alinear el cilindro con el imán-. Sin embargo para

desplazamientos entre 11 y 26 mm el par es desalineante haciendo aumentar el ángulo β . A partir de 26 mm hasta llegar a la pared interior el par es de nuevo alineante.

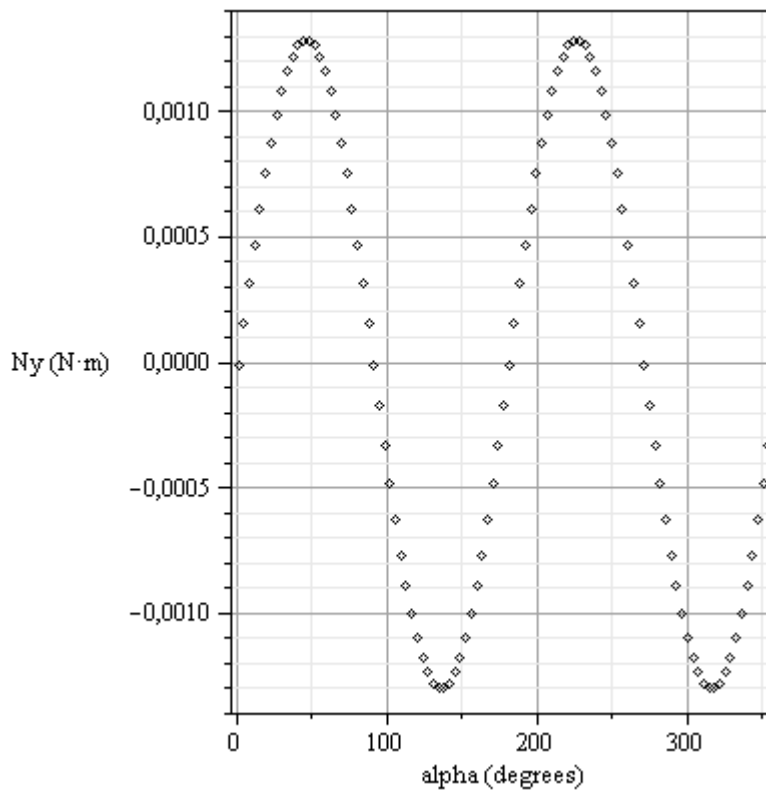


5.7. Caso 7

Imán en el origen (centro del cilindro) según lo giramos en el plano axial zx .

Las tres componentes de la fuerza resultan ser nulas con un error de 10^{-10} N.

Las componentes primera y tercera (N_x y N_z) del par de fuerzas resultante son nulas con un error de 10^{-11} N. La componente segunda, sin embargo tiene una dependencia oscilatoria con el ángulo α como puede verse en la figura siguiente.

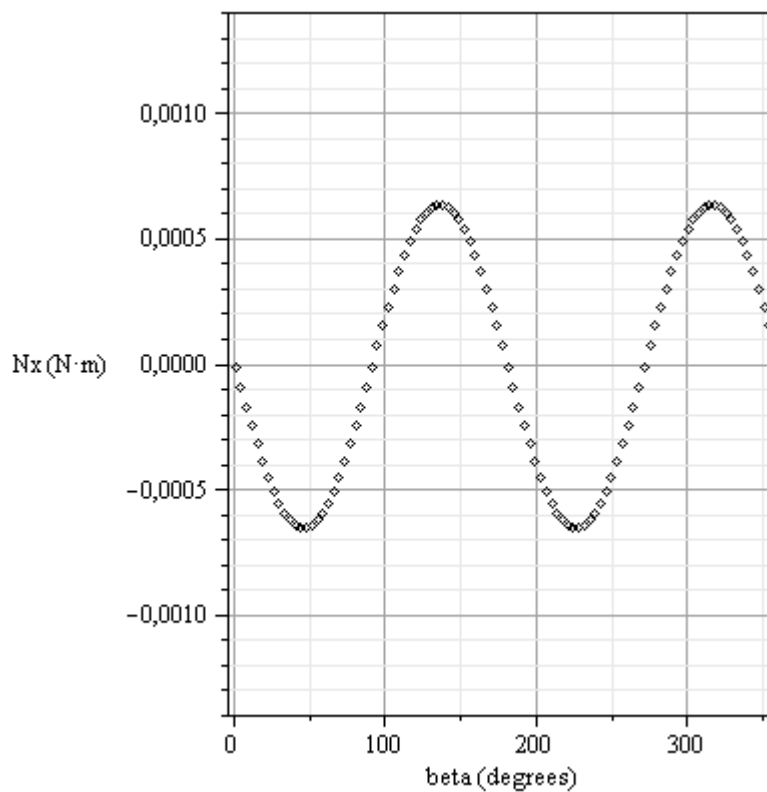


El par de fuerzas que aparece tiende por consiguiente a alinear el cilindro con el imán axialmente.

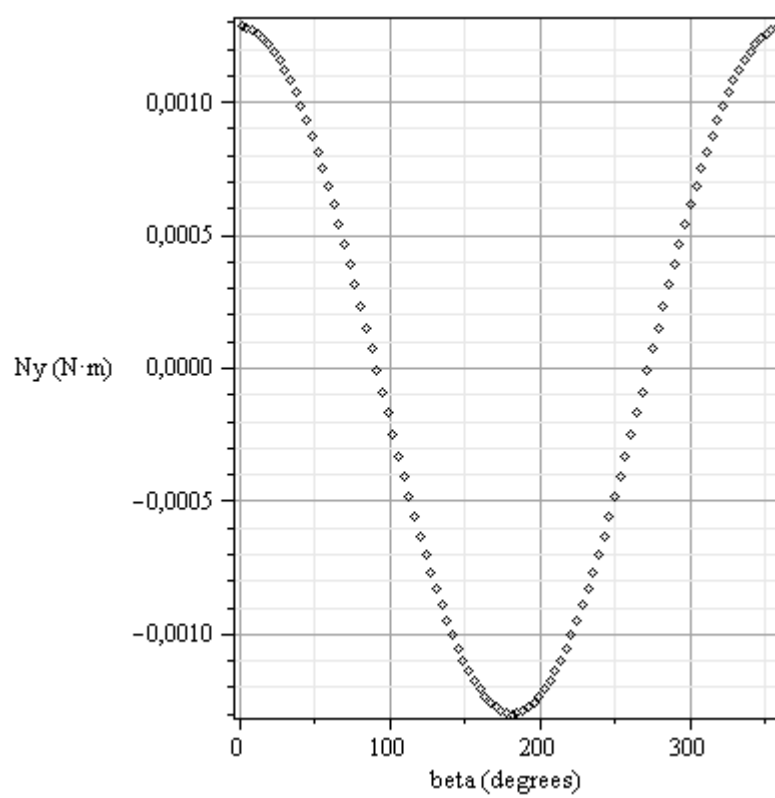
5.8. Caso 8.

Imán en el origen (centro del cilindro) girado un ángulo $\alpha=45^\circ$ en torno al eje "y" y que giramos de forma continua en torno de $-x$ un ángulo β .

Las fuerzas siguen siendo nulas pero no así las primera y segunda componentes del par de fuerzas.



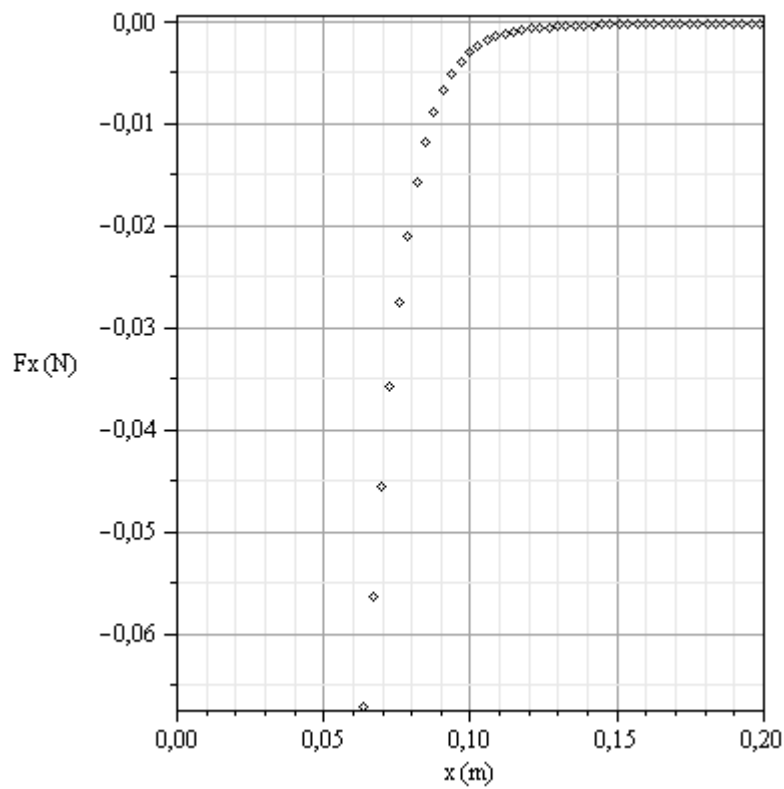
Puede comprobarse cómo ambas componentes tienden a alinear el cilindro con el eje del cilindro.



5.9. Caso 9

Imán en el exterior del cilindro con orientación del eje paralelo al eje del cilindro ($\alpha=0$).

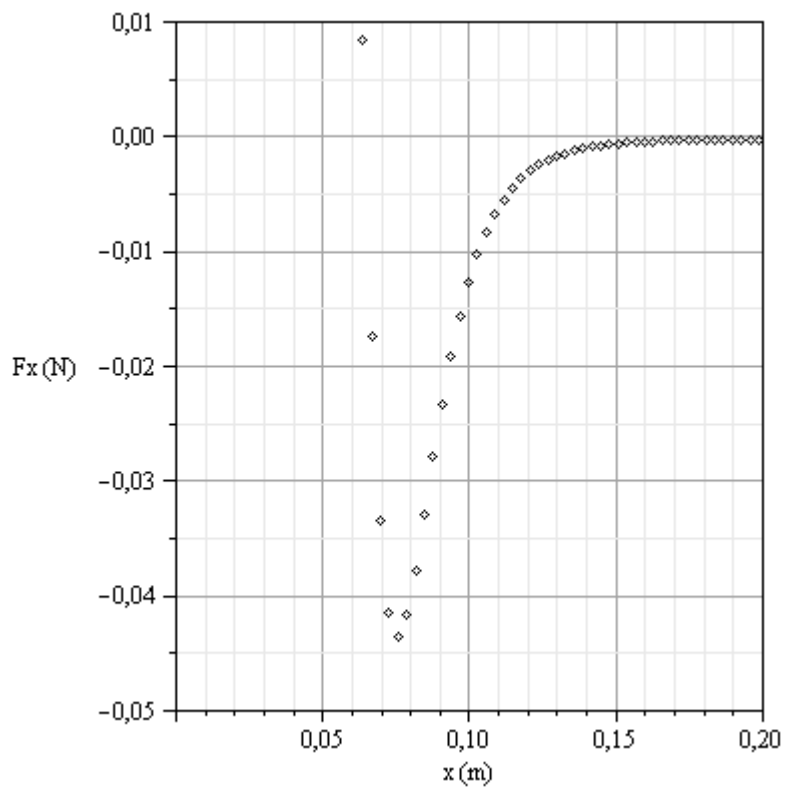
La fuerza radial es repulsiva, tanto más cuanto más cerca están.



5.10. Caso 10

Imán en el exterior del cilindro con orientación del eje radial ($\alpha=90^\circ$).

Presenta una peculiaridad especial: la fuerza es restauradora (atractiva) cuando el imán está próximo al cilindro.



6. CONCLUSIONES GENERALES

Se ha demostrado la validez de la expresión PD-GP para cualquier forma del superconductor en estado Meissner

Esta expresión permite el calculo tanto de las fuerzas, como de los momentos generados entre un superconductor en estado Meissner y un imán permanente

La fuerza que se ejercen imán y superconductor es la suma de contribuciones de cada elemento de superficie local y cada una de ellas es el doble de lo que correspondería a la fuerza directa entre imagen local e imán real.

Se interpreta geométricamente la estabilidad que puede generar el simple efecto Meissner aportando así un criterio de diseño.

Aplicando esta expresión al caso de un imán en un superconductor cilíndrico hueco, caracterizamos su dinámica de configuraciones con posibles aplicaciones a cojinetes y estabilizadores.

Podemos conseguir la estabilidad radial, pero no se logra la estabilidad axial requiriendo elementos exteriores que absorban esos esfuerzos.

Los efectos de los bordes son importantes, así como, el espesor del propio superconductor. Apareciendo puntos de equilibrio tanto estables como inestables fuera del eje axial para determinadas orientaciones del imán.

7. ANEXOS: HOJAS MAPLE EMPLEADAS

CASO 5: Imán orientado radialmente ($\alpha=90^\circ$) que movemos desde el centro del cilindro hasta la pared interior.

```
restart : with( VectorCalculus ) :
      with( Student[ MultivariateCalculus ] ) : with( plots ) :
      with( ScientificConstants ) : SetCoordinates( 'cartesian'[x,y,z] ) :
```

```
Units:-UseSystem( SI );
```

```
m := evalf( ( 0.831 / Constant(  $\mu_0$  ) ) * ( 0.0127^3 * Pi ) / 4 );
1.063878920
```

```
mm := VectorField( ( sin(alpha), 0, cos(alpha) ) );
r1 := VectorField( ( x1 - x, y1 - y, z1 - z ) ) : r2
    := VectorField( ( x2 - x, y2 - y, z2 - z ) ) : r3
    := VectorField( ( x3 - x, y3 - y, z3 - z ) ) : r4
    := VectorField( ( x4 - x, y4 - y, z4 - z ) ) :
(sin( $\alpha$ )) $\bar{e}_x$  + (cos( $\alpha$ )) $\bar{e}_z$ 
```

```
n1 := (r1.r1)^(-1/2) r1 : n2 := (r2.r2)^(-1/2) r2 : n3 := (r3.r3)^(-1/2) r3 : n4 := (r4.r4)^(-1/2) r4 :
```

```
H1 := simplify( ( 1 / ( 4 * Pi ) ) * ( ( 3 * ( n1.mm ) * n1 - mm ) / ( r1.r1 )^(3/2) ) ) :
H2 := simplify( ( 1 / ( 4 * Pi ) ) * ( ( 3 * ( n2.mm ) * n2 - mm ) / ( r2.r2 )^(3/2) ) ) :
H3 := simplify( ( 1 / ( 4 * Pi ) ) * ( ( 3 * ( n3.mm ) * n3 - mm ) / ( r3.r3 )^(3/2) ) ) :
H4 := simplify( ( 1 / ( 4 * Pi ) ) * ( ( 3 * ( n4.mm ) * n4 - mm ) / ( r4.r4 )^(3/2) ) ) :
```

Eje del cilindro z.

Radio interior cilindro Ri, radio exterior Rex, longitud L centrado en z=0

$kk1 := VectorField(\langle -x1, -y1, 0 \rangle) : kk2 := VectorField(\langle x2, y2, 0 \rangle) : k3 := VectorField(\langle 0, 0, 1 \rangle) : k4 := -k3 :$

$Ri := 0.03 : Rex := 0.06 : L := 0.06 :$

$fint := (kk1 \&x H1) \&x H1 : fborde1 := ((k3 \&x H3) \&x H3) : fborde2 := ((k4 \&x H4) \&x H4) : fext := ((kk2 \&x H2) \&x H2) :$

$pint := r1 \&x fint : pborde1 := r3 \&x fborde1 : pborde2 := r4 \&x fborde2 : pext := r2 \&x fext :$

$x2 := Rex \cdot \cos(\phi2) : y2 := Rex \cdot \sin(\phi2) :$

$x1 := Ri \cdot \cos(\phi1) : y1 := Ri \cdot \sin(\phi1) :$

$x3 := \rho3 \cdot \cos(\phi3) : y3 := \rho3 \cdot \sin(\phi3) : z3 := \frac{L}{2} :$

$x4 := \rho4 \cdot \cos(\phi4) : y4 := \rho4 \cdot \sin(\phi4) : z4 := -\frac{L}{2} :$

$\alpha := \frac{\text{Pi}}{2} : y := 0.0 : z := 0.0 : Np := 100 :$

for i **from** 0 **by** 1 **to** $Np - 1$ **do**

$$x := \frac{i \cdot Ri}{Np} :$$

$$xx[i] := x :$$

$$fint1[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fint[1]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

$$fint2[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fint[2]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

$$fint3[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fint[3]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

$$pint1[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((pint[1]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

$$pint2[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((pint[2]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

$$pint3[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((pint[3]),\right.$$

$$z1 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi1 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\left. \right):$$

end do:

for i **from** 0 **by** 1 **to** $N_p - 1$ **do**

$x := \frac{i \cdot R_i}{N_p} :$

$xx[i] := x :$

$fext1[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fext[1]),\right.$
 $\left.z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\right) :$

$fext2[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fext[2]),\right.$
 $\left.z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\right) :$

$fext3[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \cdot ApproximateInt\left((fext[3]),\right.$
 $\left.z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2 \cdot Pi)\right) :$

$pext1[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right)$
 $\cdot ApproximateInt\left((pext[1]), z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2\right.$
 $\left.\cdot Pi)\right) :$

$pext2[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right)$
 $\cdot ApproximateInt\left((pext[2]), z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2\right.$
 $\left.\cdot Pi)\right) :$

$pext3[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right)$
 $\cdot ApproximateInt\left((pext[3]), z2 = -\frac{L}{2} .. \frac{L}{2}, \phi2 = 0 .. evalf(2\right.$
 $\left.\cdot Pi)\right) :$

end do:

for i **from** 0 **by** 1 **to** $Np - 1$ **do**

$x := \frac{i \cdot Ri}{Np} :$

$xx[i] := x :$

$fborde21[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((fborde2[1] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

$fborde22[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((fborde2[2] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

$fborde23[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((fborde2[3] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

$pborde21[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((pborde2[1] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

$pborde22[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((pborde2[2] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

$pborde23[i] := evalf(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2)$

$\cdot ApproximateInt((pborde2[3] \cdot \rho_4), \rho_4 = Ri .. Rex, \phi_4 = 0$
 $..evalf(2 \cdot \Pi)) :$

end do:

for i **from** 0 **by** 1 **to** $N_p - 1$ **do**

$$x := \frac{i \cdot R_i}{N_p} :$$

$$xx[i] := x :$$

$$fborde11[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((fborde1[1] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

$$fborde12[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((fborde1[2] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

$$fborde13[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((fborde1[3] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

$$pborde11[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((pborde1[1] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

$$pborde12[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((pborde1[2] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

$$pborde13[i] := evalf\left(4 \cdot Constant(\mu_0) \cdot m^2\right) \\ \cdot ApproximateInt\left((pborde1[3] \cdot \rho_3), \rho_3 = Ri \dots Rex, \phi_3 = 0\right. \\ \left. \dots evalf(2 \cdot \Pi)\right) :$$

end do:

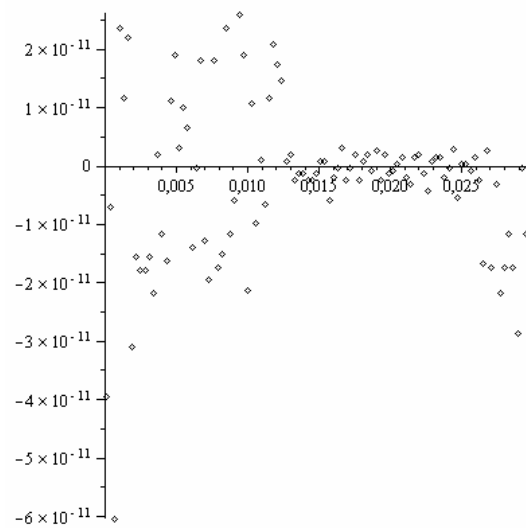
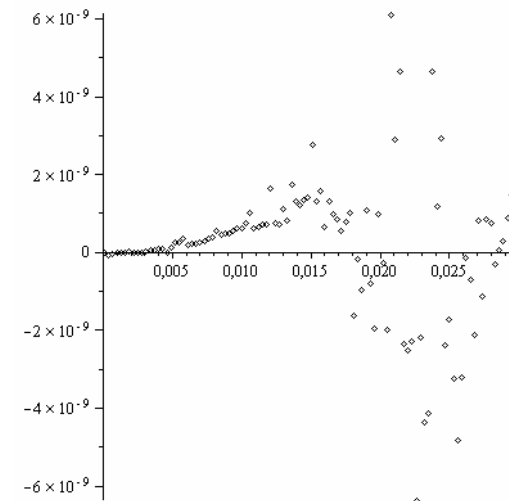
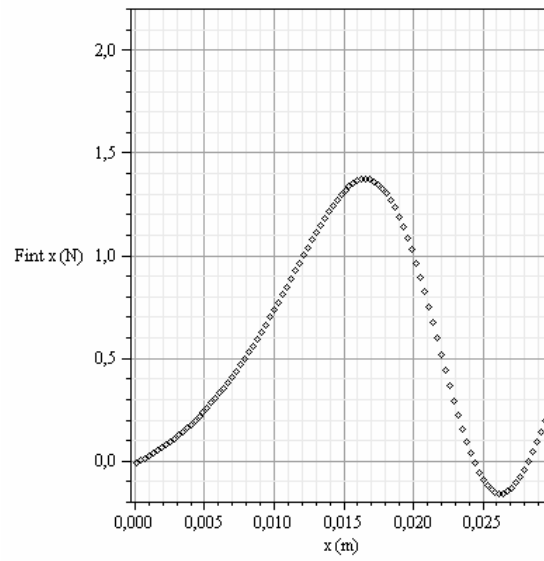
for i **from** 0 **by** 1 **to** $N_p - 1$ **do**

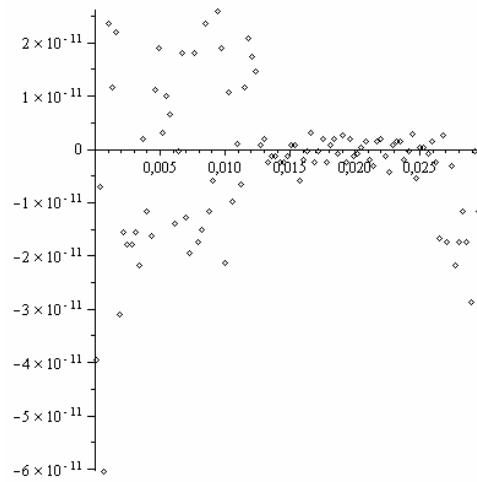
$$f1[i] := fint1[i] + fext1[i] + fborde11[i] + fborde21[i] : \\ f2[i] := fint2[i] + fext2[i] + fborde12[i] + fborde22[i] : \\ f3[i] := fint3[i] + fext3[i] + fborde13[i] + fborde23[i] : \\ p1[i] := pint1[i] + pext1[i] + pborde11[i] + pborde21[i] : \\ p2[i] := pint2[i] + pext2[i] + pborde12[i] + pborde22[i] : \\ p3[i] := pint3[i] + pext3[i] + pborde13[i] + pborde23[i] :$$

end do:

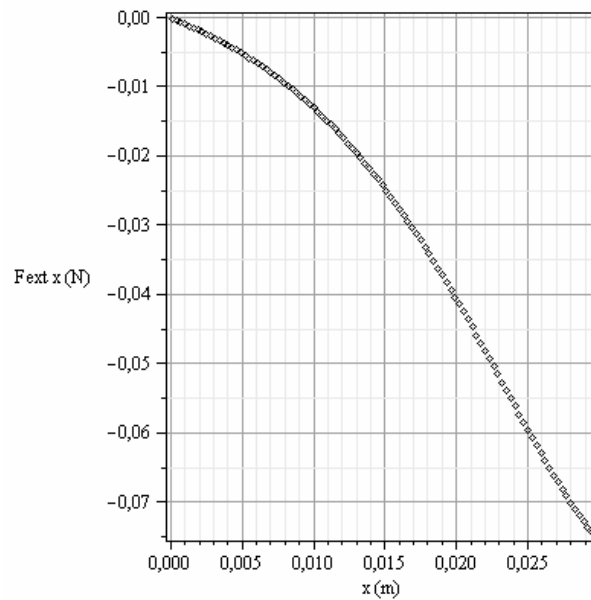
$$9.00037785210^{-12}$$

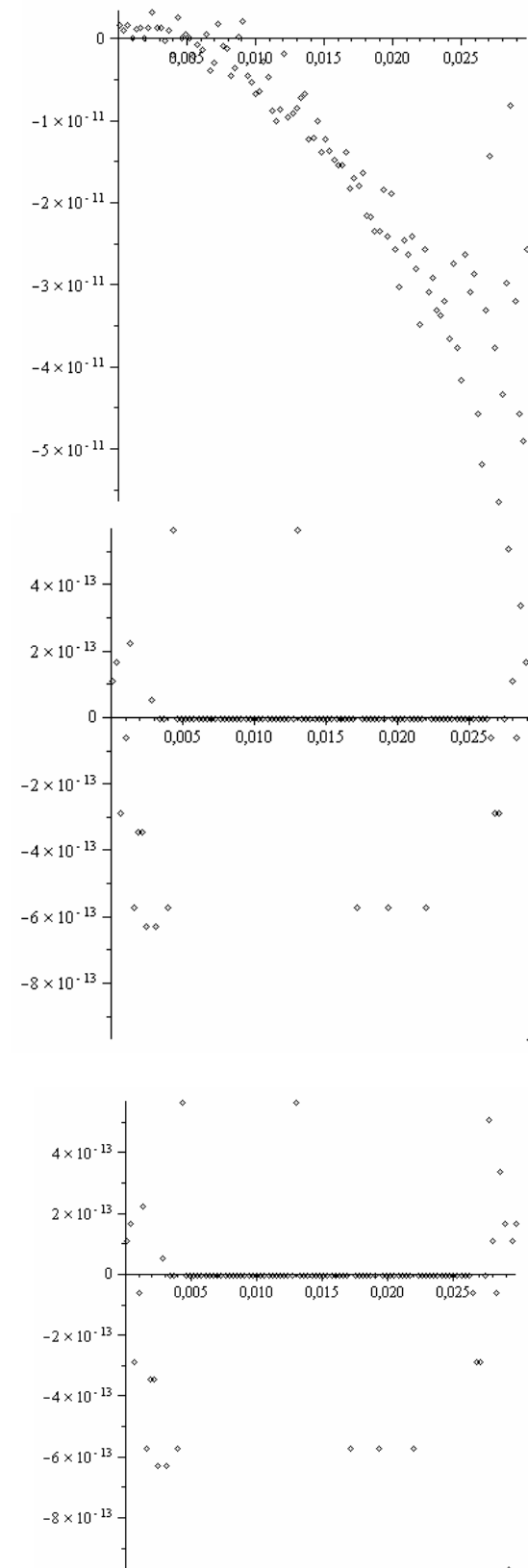
$$pointplot(\{seq([xx[i], fint1[i]], i = 0 \dots N_p - 1)\}); \\ pointplot(\{seq([xx[i], fint2[i]], i = 0 \dots N_p - 1)\}); \\ pointplot(\{seq([xx[i], fint3[i]], i = 0 \dots N_p - 1)\});$$



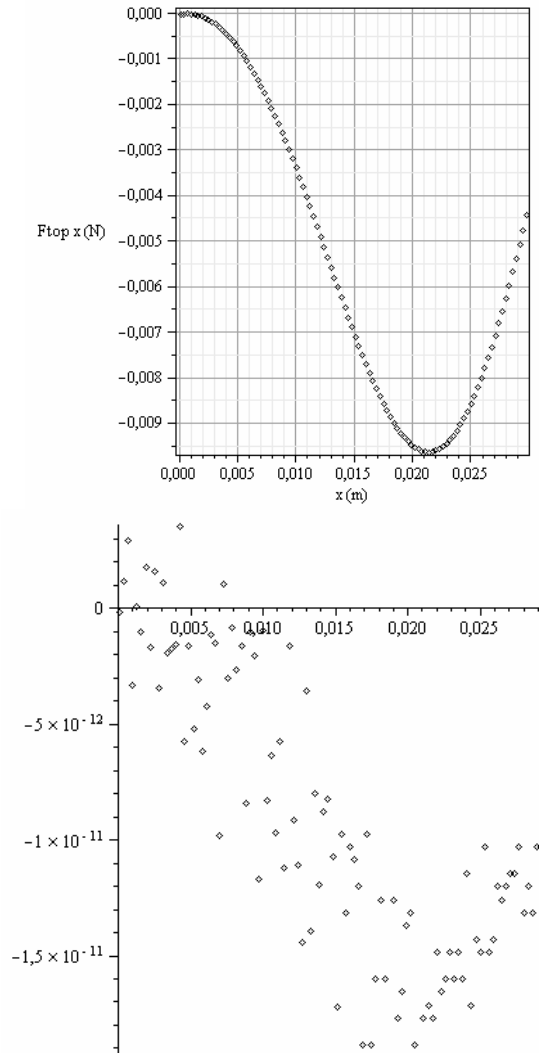


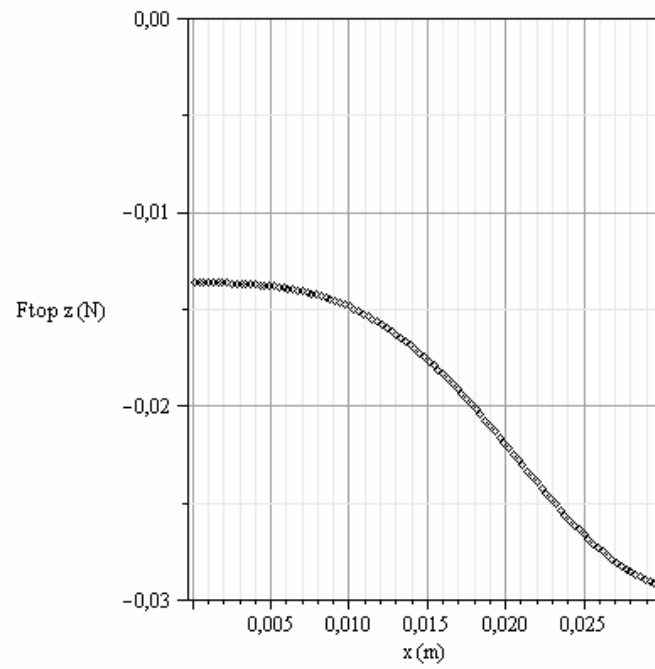
```
pointplot({seq([xx[i],fext1[i]],i=0..Np-1)});
pointplot({seq([xx[i],fext2[i]],i=0..Np-1)});
pointplot({seq([xx[i],fext3[i]],i=0..Np-1)});
```



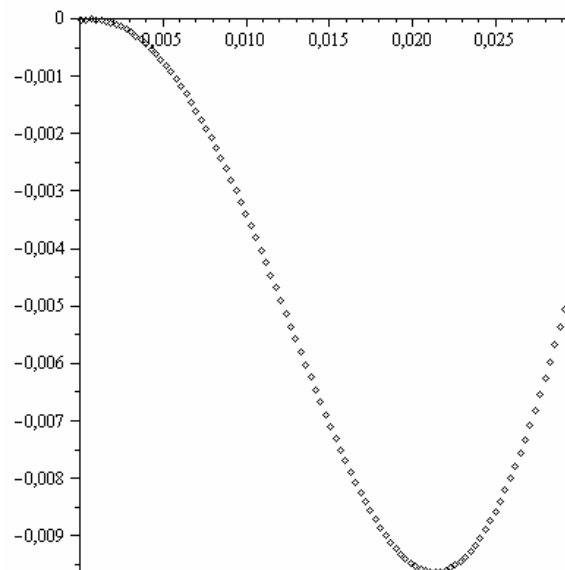



```
pointplot({seq([xx[i],fborde11[i]],i=0..Np-1)});
pointplot({seq([xx[i],fborde12[i]],i=0..Np-1)});
pointplot({seq([xx[i],fborde13[i]],i=0..Np-1)});
```

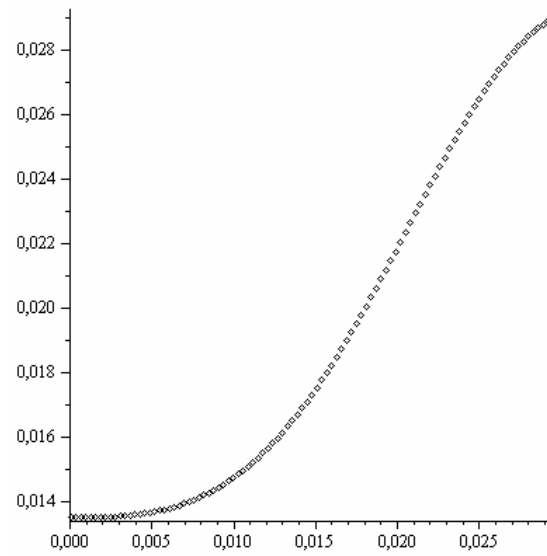
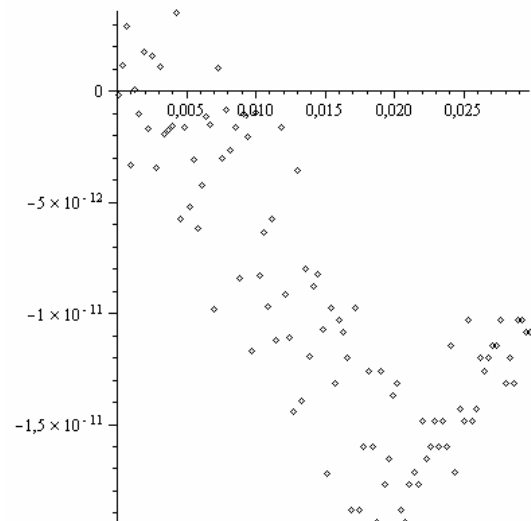




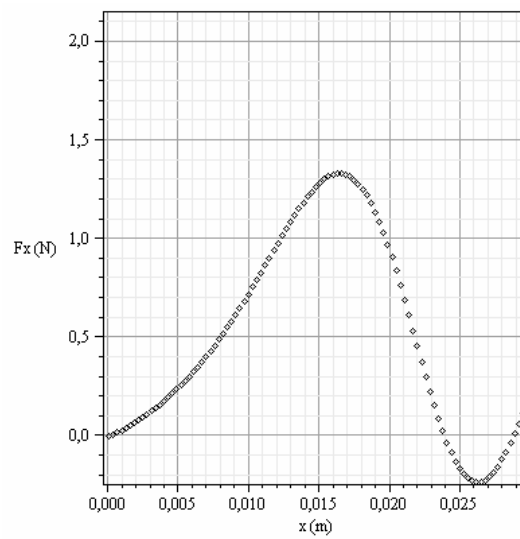
```
pointplot ({seq([xx[i],fborde21 [i]],i = 0 ..Np - 1)});
pointplot ({seq([xx[i],fborde22 [i]],i = 0 ..Np - 1)});
pointplot ({seq([xx[i],fborde23 [i]],i = 0 ..Np - 1)});
```

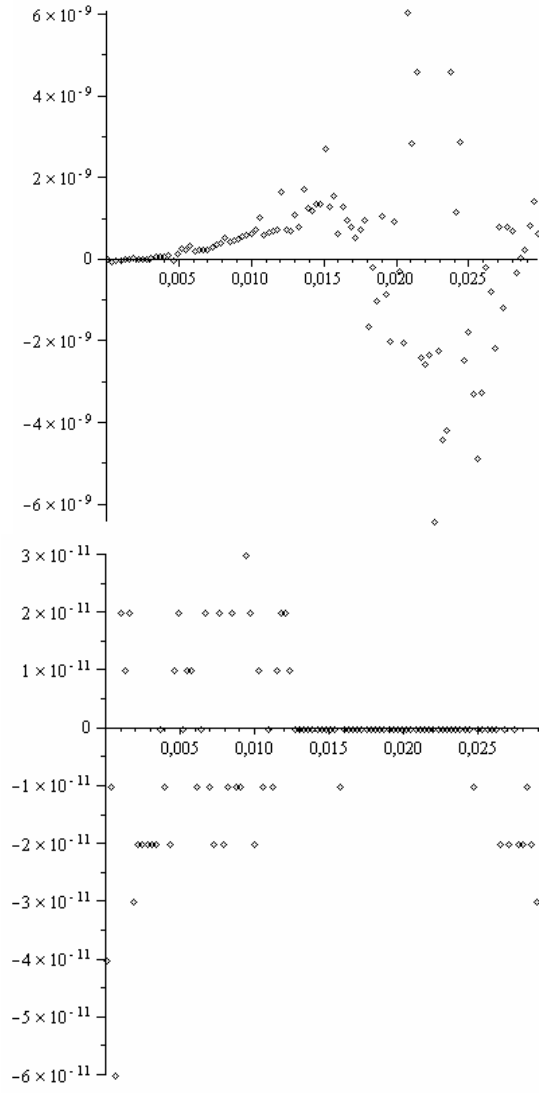


SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER



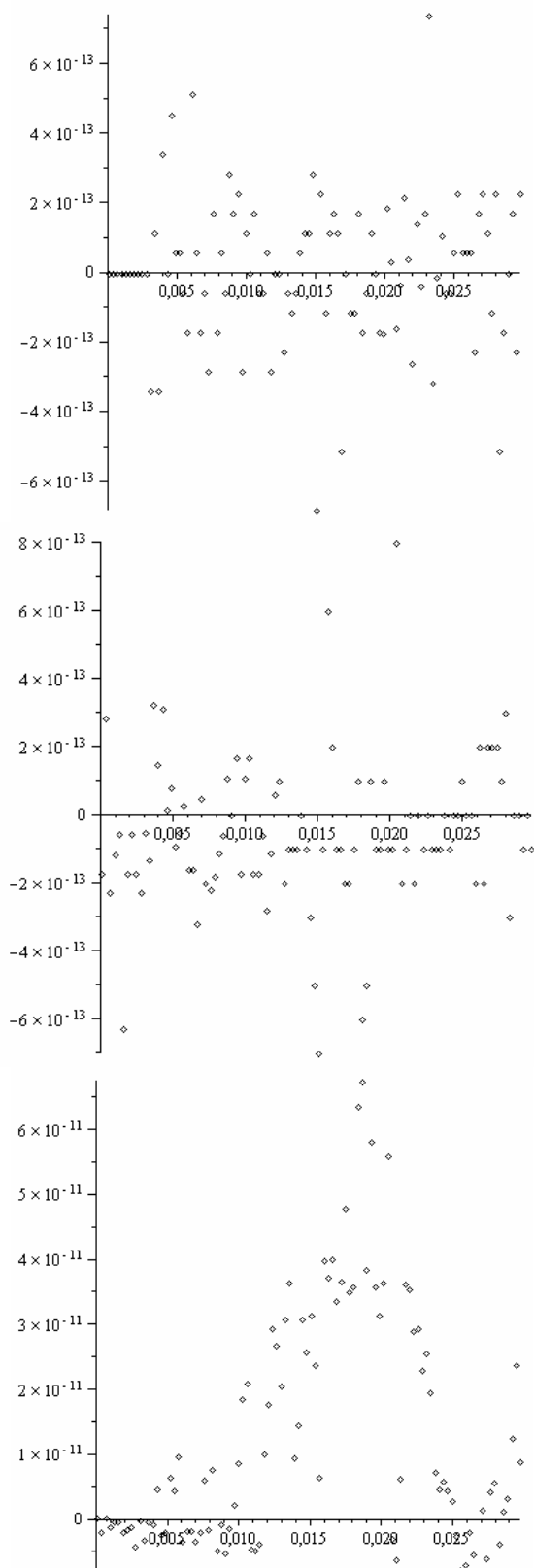
```
pointplot( {seq([xx[i],f1[i]],i=0..Np-1)});
pointplot( {seq([xx[i],f2[i]],i=0..Np-1)});
pointplot( {seq([xx[i],f3[i]],i=0..Np-1)});
```





```
pointplot({seq([xx[i], p1[i]], i = 0..Np - 1)});
pointplot({seq([xx[i], p2[i]], i = 0..Np - 1)});
pointplot({seq([xx[i], p3[i]], i = 0..Np - 1)});
```

SISTEMATIZACION DEL DISEÑO DE DISPOSITIVOS DE LEVITACION SUPERCONDUCTORA POR EFECTO MEISSNER



8. REFERENCIAS

[Alario, Vicent]

Miguel Angel Alario and Jose Luis Vicent, *Superconductividad*, 1st edition (EUDEMA, Madrid, 1991)

[Arkadiev]

V. Arkadiev, Nature 160, 330 (1947).

[Bednorz]

J G. Bednorz and K. A. Muller, Z. Phys. B64 (1986) 184.

[Brandt]

E. H. Brandt, Appl. Phys. Lett. 53, 1554 (1988).

[Buchhold]

T. A. Buchhold, Sci. Am. 3 (2002) 74.

[Burns],

Gerald Burns. High Temperature Superconductivity: An Introduction. Boston: Academic Press, Inc., 1992.

[Cansiz]

A. Cansiz, J. R. Hull, and Ö. Gundogdu, Supercond. Sci. Technol. 18 (2005) 990.

[Coffey]

M. W. Coffey, Phys. Rev. B 65 (2002) 214524.

[Demachi]

Kazuyuki Demachi, Akira Miura, Tetsuya Uchimoto and Kenzo Miya, *Numerical Analysis of Rotation Loss of Superconducting Magnetic Bearing*, IEEE transactions on applied superconductivity, VOL. 11, NO. 1, MARCH 2001

[Early]

E. A. Early, C. L. Seaman, K. N. Yang, and M. B. Maple, Am. J. Phys. 56 (1988) 617.

[García-Prada]

J.C. García-Prada, C. Castejón, H. Rubio, Problemas Resueltos de Teoría de Máquinas y Mecanismos, Paraninfo (2007).

[Giaro]

K. Giaro, W. Gorzkowski, and T. Motylewski, Physica C 168 (1990) 479.

[Goldstein]

H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company Inc. (1987).

[Griffiths],

David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

[Heinz E. Knoepfel]

Heinz E. Knoepfel, *Magnetic Fields*, Ed. John Wiley & Sons, Inc. 2000

[Hellman]

F. Hellman, E. M. Gyorgy, D. W. Johnson, H. M. O'Bryan, and R. C. Sherwood, J. Appl. Phys. 63, 447 (1988).

[Hull]

J. R Hull, Supercond. Sci. Technol. 13 (2000) 854.

[Jackson],

John D. Jackson, Classical Electrodynamics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

J. Appl. Phys. 79 (6), 15 March 1996

[Je-Hwan Yon]

Je-Hwan Yon, Yoon-Chul Rhim, *Study on the Characteristics of Superconducting Bearing*, IEEE transactions on magnetics, VOL 35. NO 5, SEPTEMBER 1999

[K. B. Ma]

K. B. Ma, Y. V. Postrekhin, and W. K. Chu, *Superconductor and magnet levitation devices*, American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1622973] VOLUME 74, NUMBER 12

[Kangwon Lee]

Kangwon Lee, *Advanced design and experiment of a small-sized flywheel energy storage system using a high-temperature superconductor bearing*, Supercond. Sci. Technol. 20 (2007) 634–639

[Kittel],

C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1976.

[Komori]

M. Komori and T. Hamasaki, *Improvement and Evaluation of Bearing Stiffness in High T_c Superconducting Magnetic Bearing*, IEEE transactions on applied superconductivity, VOL. 11 . NO. 1 , MARCH 2001

[Kordyuk]

A. A. Kordyuk, Jour. Appl. Phys. 83 (1998) 610.

[Lin]

Q. G. Lin, Phys. Rev. B 74 (2006) 24510.

[Lugo]

J. Lugo, V. Sosa, Physica C 324 (1999) 9

[Lynn],

Jeffrey W. Lynn, ed. *High Temperature Superconductivity*. New York: Springer-Verlag, 1990.

[Malozovsky],

Y.M. Malozovsky, Fan, J.D., “Magnetic flux quantization in superconductors and the Aharonov-Bohm effect.” *Physica Letters A* 257(Feb 1999): 332-337.

[McMichael]

C. K. McMichael, K. B. Ma, M. A. Lamb, M. W. Lin, L. Chow, R. L. Meng, P. H. Hot- and W. K. Chu, *Practical adaptation in bulk superconducting magnetic bearing applications*, *Appl. Phys. Lett.* 60 (15), 13 April 1992

[Moon 1]

F. C. Moon, *Superconducting Levitation*, Wiley-VCH (2004).

[Moon 2]

F. C. Moon, *Magnetosolids Mechanics*, Wiley (1984).

[Nagaya]

S. Nagaya, K. Komura, N. Kashima, M. Minami, H. Kawashima, Y. Nara, H. Ishigaki, *Influences of separate position to radial direction between bulk superconductor and permanent magnetic ring about magnetic levitation and rotating characteristics*, *Physica C* 392–396 (2003) 754–758

[Okano]

Makoto Okano, Nuriliaru Tamada, Shuicliiro Fuchino. Itaru Ishii and Toshio Iwmoto, *Numerical Analysis of a Superconducting Bearing*, *IEEE transactions on applied superconductivity*. VOL. 10, NO. 1, MARCH 2000

[Perez-Diaz, Garcia-Prada](1)

J.L. Perez-Diaz and J.C. Garcia-Prada, *Interpretation of method of images in estimating superconducting levitation*, *Physica C - Superconductivity and its application*, Vol. 477, p. 141-144. (2007).

[Perez-Diaz, Garcia-Prada](2)

J.L. Perez-Diaz and J.C. Garcia-Prada, *Finite-size-induced stability of a permanent magnet levitating over a superconductor in the Meissner state*, Apply Physics Letters, Vol. 91, Artículo N° 91. (2007).

[Peters]

P. N. Peters, R. C. Sisk, E. W. Urban, C. Y. Huang, and M. K. Wu, Appl. Phys. Lett. 52, 2066 (1988).

[Postrekhin]

K. B. Ma, Y. V. Postrekhin, and W. K. Chu, Review of Scientific Instruments 74 (2003) 4989.

[Quion]

Quion Gui Lin, Phys. Rev. B 74, 24510 (2006).

[Schoch]

K. F. Schoch, Adv. Cryogen. Eng. 6 (1960) 65.

[Serena]

Merteen Eley Serena. The London Theory of Superconductivity Classical Electrodynamics (Ph 106), 3rd term (2002)

[Shiraishi]

Ryousuke Shiraishi, Kazuyuki Demachi, Mitsuru Uesaka, and Ryoichi Takahata, *Numerical and Experimental Analysis of the Rotation Speed Degradation of Superconducting Magnetic Bearings*, IEEE transactions on applied superconductivity, VOL. 13, NO. 2, JUNE 2003.

[Simon]

I. Simon, J. Appl. Phys. 24 (1953) 19.

[Terry P. Orlando]

Terry P. Orlando Dept. of Electrical Engineering MIT, Lecture 1, 2003

[Sivrioglu]

Selim Sivrioglu and Yusuf Cinar, *Levitation analysis of a ring shaped permanent magnet–high temperature superconductor vertical bearing system*, Supercond. Sci. Technol. 20 (2007) 559–563

URL:musr.physics.ubc.ca/theses/Sonier/node7.htm

[Varessi]

E. Varessi, L. Borghi, and S. Zanella, Il Nuovo Cimento 19 D N 8-9, 1281 (1997).

[Yang] (1)

Z. J. Yang, T.H. Johansen, G. Helgesen and A. T. Skjeltorp, Physica C 160 (1989) 461.

[Yang] (2)

Z. J. Yang and J. R. Hull, Effect of size on levitation force in a magnet/superconductor system,

[Yang] (3)

W.M. Yang, X.X. Chao, Z.B. Shu, S.H. Zhu, X.L. Wu, X.B. Bian, P. Liu, *A levitation force and magnetic field distribution measurement system in three dimensions*, Physica C 445–448 (2006) 347–352

[Yong Yang]

Yong Yang and Xiaojing Zhenga, *Method for solution of the interaction between superconductor and permanent magnet*, JOURNAL OF APPLIED PHYSICS 101, 113922 _2007_

[Zeisberger]

Matthias Zeisberger, Tobias Habisreuther, Doris Litzkendorf, Oleksiy Surzhenko,
Robert Muller, Wolfgang Gawalek, *Optimization of Levitation Forces*, IEEE
transactions on applied superconductivity, VOL. 11, NO.1, MARCH 2001